

Kombinatorika és gráfelmélet II
PótZH, 2025. december 11. 8.15-9.45, E 305c.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, számoló- és számítógép, mobiltelefon, okos- és gondosóra, tévé, rádió, fűnyíró, hajszárító, drón, porszívó, mikrohullámú sütő, stb használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. G és H gyengén izomorf gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \chi(H)$.

2. G csúcsai, $\{v_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 8\}$, megfelelnek a szokásos 8×8 -as sakktábla mezőinek. Két különböző csúcs, v_{ij} és v_{kl} össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő mezők lólépésre vannak egymástól, vagyis ha $|i - k| = 1$ és $|j - l| = 2$, illetve ha $|i - k| = 2$ és $|j - l| = 1$.

Döntsük el, hogy G összehasonlítás gráf, vagy nem.

3. G csúcsai v_i , $1 \leq i \leq 100$. Minden $1 \leq i \leq 99$ számra v_i és v_{i+1} össze van kötve éllel. Vagyis G egy 100 hosszú út. Most legyen $1 \leq i$, $i + 2 \leq j \leq 100$. A $G_{i,j}$ gráfot úgy kapjuk, hogy a G gráfhoz hozzávesszük a $v_i v_j$ élt. Határozzuk meg minden ilyen i, j számpárra $ch(G_{i,j})$ értékét.

4. Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 3, 3, 3) \leq R(6, 6)$.

5. Legyenek H csúcsai a, b, c, d , élei ab, ac, bc, ad . Határozzuk meg $ex(6, H)$ értékét.

6. Legyen $n > 0$, $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy halmazrendszer azzal a tulajdonsággal, hogy nincsenek különböző $A, B, C \in \mathcal{F}$ halmazok, amelyekre $A \subset B$ és $A \subset C$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Jó munkát!