

Kombinatorika és gráfelmélet II
ZH, 2025. november 27. 8.15-9.45, E 305c.
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. G és H gyengén izomorf gráfok. Bizonyítsuk be, hogy G páros gráf akkor és csak akkor, ha H páros gráf.

Egy gráf páros gráf akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

5 pont

Mivel G és H gyengén izomorfak, létezik G és H élei között egy olyan bijekció, amely kört körbe visz. Ezért G akkor és csak akkor tartalmaz páratlan kört, ha H , vagyis G páros gráf akkor és csak akkor, ha H páros gráf.

5 pont

2. a. Bizonyítsuk be, hogy C_7 (a 7 hosszú kör) nem összehasonlítás gráf.

b. Legkevesebb hány élt kell C_7 -hez hozzáadni, hogy összehasonlítás gráfot kapjunk?

a. 1. megoldás: Tudjuk, hogy az összehasonlítás gráfok perfektek, de C_7 nem perfekt (akár az erős perfekt gráf tétel alapján, akár direktben: $\chi(C_7) = 3$, $\omega(C_7) = 2$).

4 pont

a. 2. megoldás: Tegyük fel, hogy C_7 csúcsai $v_1, \dots, v_7$, és C_7 a $\prec$ részbenrendezés összehasonlítás gráfja. Ekkor $v_1 \prec v_2$ vagy $v_2 \prec v_1$, szimmetria miatt feltehetjük, hogy $v_1 \prec v_2$. Ha $v_2 \prec v_3$, akkor $v_1 \prec v_3$, ami lehetetlen, mert v_1 és v_3 nem szomszédosak. Tehát $v_3 \prec v_2$. Hasonlóan kapjuk, hogy $v_3 \prec v_4$, $v_5 \prec v_4$, $v_5 \prec v_6$, $v_7 \prec v_6$, és végül $v_7 \prec v_1$ (vagyis "felváltva" vannak irányítva az élek). De ekkor $v_7 \prec v_1 \prec v_2$, ami ellentmondás, mert v_7 és v_2 nem szomszédosak. Tehát C_7 nem összehasonlítás gráf.

4 pont

b. Elég egy élt hozzáadni, például a v_7v_2 élt. Ahogy az a részben, legyen $v_3 \prec v_2$, $v_3 \prec v_4$, $v_5 \prec v_4$, $v_5 \prec v_6$, $v_7 \prec v_6$, $v_7 \prec v_1$, ekkor $v_7 \prec v_1 \prec v_2$, vagyis $v_7 \prec v_2$, ennek a részbenrendezésnek éppen a C_7 plusz a v_7v_2 él az összehasonlítás gráfja.

6 pont

3. G csúcsai, $\{v_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 8\}$, megfelelnek a szokásos 8×8 -as sakktábla mezőinek. Két különböző csúcs, v_{ij} és v_{kl} össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i - k| \leq 1$ és $|j - l| \leq 1$, vagyis ha a megfelelő mezők király lépésre vannak egymástól. Bizonyítsuk be, hogy $4 \leq ch(G) \leq 5$.

Mivel (például) a $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}$ csúcsok klikket alkotnak, $4 \leq ch(G)$.

3 pont

Most tegyük föl, hogy minden csúcsnak van egy 5 hosszú listája. Színezzük ki mohó módon a csúcsokat a következő sorrendben: először az első sort, jobbról balra, utána a második sort jobbról balra, és így tovább. Vegyük észre, hogy egy éppen sorra kerülő csúcsnak (mezőnek) legfeljebb 4 már kiszínezett szomszédja van! Tehát van a listáján ezektől eltérő szín. Ezért nem akadunk el a színezéssel, vagyis $ch(G) \leq 5$.

7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy N szám a következő tulajdonsággal. Akárhogy színezzük ki a $2, 3, \dots, N$ számokat két színnel, léteznek egyszínű x, y, z számok, amelyekre $xy = z$.

A Schur tétel alapján létezik olyan M , hogy akárhogy színezzük ki a $1, 2, \dots, M$ számokat két színnel, léteznek egyszínű a, b, c számok, amelyekre $a + b = c$.

2 pont

Legyen $N = 2^M$ és tekintsük a $2, 3, \dots, N$ számok egy színezését két színnel. Nevezzük ezt az eredeti színezésnek. Képezzük ebből az $1, 2, \dots, M$ számok színezését a következő módon. Az i szám színe az új színezésben legyen ugyanaz, mint 2^i színe az eredeti színezésben.

5 pont

Ekkor az új színezésben vannak egyszínű a, b, c számok, amelyekre $a + b = c$. Ez az eredeti színezésben azt jelenti, hogy $x = 2^a$, $y = 2^b$ és $z = 2^c$ egyszínűek és $xy = 2^{a+b} = 2^c = z$.

3 pont

5. Tetszőleges H_1, H_2 gráfokra legyen $ex(n, H_1, H_2)$ az n csúcsú, se H_1 -et, se H_2 -t részgráfként nem tartalmazó gráfok maximális élszáma.

Határozzuk meg $ex(n, H_1, H_2)$ értékét minden $n > 0$ -ra, ahol H_1 a háromszög, H_2 az 5 hosszú kör.

Azt állítjuk, hogy $ex(n, H_1, H_2) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$.

1 pont

A teljes páros gráfnak $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ -nek éppen $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ éle van és nem tartalmaz páratlan kört, így H_1 -et és H_2 -t sem. Tehát $ex(n, H_1, H_2) \geq \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$.

4 pont

Most tegyük fel, hogy G -nek n csúcsa és több, mint $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$ éle van. Mantel tétele alapján ekkor G tartalmaz háromszöget, vagyis H_1 -et, tehát $ex(n, H_1, H_2) \leq \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$. Tehát $ex(n, H_1, H_2) = \lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil$.

5 pont

6. Legyen $n > 0$, $k < n/2$ és páros. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy k -uniform halmazrendszer azzal a tulajdonsággal, hogy minden $A, B \in \mathcal{F}$ esetén $|A \cap B| > 0$ és páros. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \binom{n-1}{k-1}.$$

Vegyünk az alaphalmaznak egy ciklikus permutációját. Egy $\mathcal{F}$ -beli halmazt ívnek nevezünk, ha az elemei szomszédosak a ciklikus permutációban. Vegyünk egy I ívet. A feltételek alapján az összes többi ív vége két páros hosszú ívre bontja I -t, ráadásul egy felbontáshoz csak egy ív tartozhat. Tehát csak $k/2 - 1$ további ív lehet, vagyis összesen csak $k/2$. 5 pont

Összesen $(n-1)!$ ciklikus permutáció van, és egy halmaz $k!(n-k)!$ ciklikus permutációban lesz ív. Tehát leszámolva az összes ívet az összes ciklikus permutációban

$$(n-1)!k/2 \geq |\mathcal{F}|k!(n-k)!$$

ebből az kapjuk, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \binom{n-1}{k-1}.$$

5 pont