

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

1. gyakorlat, 2026. szeptember 10.

Perfekt gráfok

Tudnivalók

$\omega(G)$: klikkszám, legnagyobb teljes részgráf mérete.

$\chi(G)$: kromatikus szám, G (jó) színezéséhez szükséges színek száma.

G gráf perfekt, ha minden feszített G' részgráfjára (magát G -t is beleértve) $\chi(G') = \omega(G')$.

Intervallumgráf: csúcsok megfelelnek intervallumoknak egy egyenesen, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő intervallumok metszik egymást.

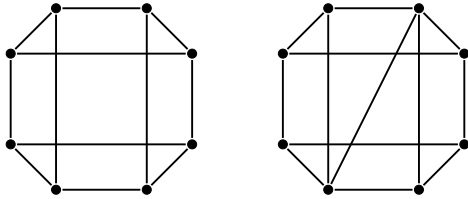
Páros gráfok, intervallumgráfok, ezek komplementerei, páros gráfok élgráfjai perfektek.

Gyenge Perfekt Gráf Tétel (Lovász 72): G perfekt akkor és csak akkor, ha $\overline{G}$ perfekt.

Erős Perfekt Gráf Tétel (Chudnovsky, Roberts, Seymour, Thomas, 2002): G perfekt akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz feszített részgráfként egy legalább 5 hosszú páratlan kört illetve komplementerét.

1. (Shift gráf) Legyen $m > 1$. Az S_m shift gráf csúcsai legyenek az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i < j \leq m$. (Elképzelhetjük (i, j) -t egy intervallumnak is.) Két csúcs, mondjuk (i, j) és (i', j') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ vagy $j = i'$. Vagyis ha az egyik intervallum ott végződik, ahol a másik kezdődik.
 - a. Bizonyítsuk be, hogy S_m nem tartalmaz háromszöget.
 - b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(S_m) \geq \log_2 m$.
2. Bizonyítsuk be, hogy a páros gráfok komplementerei perfektek.
3. Bizonyítsuk be, hogy az intervallumgráfok komplementerei perfektek.
4.
 - a. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf, de intervallumgráf komplementere.
 - b. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf komplementere, de intervallumgráf.
 - c. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf komplementere, és nem is intervallumgráf.
 - d. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami intervallumgráf komplementere, és egyben intervallumgráf is.
5. A G gráfot *ívgráfnak* hívjuk, ha a csúcsai megfelelnek intervallumoknak (íveknek) egy körön, két csúcs össze van kötve, ha a megfelelő ívek metszik egymást.
 - a. Mutassunk olyan ívgráfot, amely nem perfekt.
 - b. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy ívgráf, akkor $\chi(G) \leq 2\omega(G)$.
6. Legyenek a G_n gráf csúcsai az $1, 2, 3, \dots, n$ számok, és legyen ij él, ha i és j relatív prímek. Határozzuk meg a $\chi(G)$ és $\omega(G)$ paramétereket. Perfekt-e a G_n gráf? (Tegyük fel, hogy n elég nagy.)
7.
 - a. Legyen a H gráf a G és F perfekt gráfok diszjunkt uniója. Mutassuk meg, hogy H is perfekt gráf.
 - b. Képezzük a H' gráfot H -ból úgy, hogy minden F -beli csúcst minden G -beli csúccsal összekötünk. Mutassuk meg, hogy H' is perfekt gráf.
8. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8 -as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G -ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy 3×2 -es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy G perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?
9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független pontthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.
10. Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.
11. A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független pontthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.

12. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



13. Legyen adott egy T fa és ennek $F_1, \dots, F_n$ részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \dots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j ($i \neq j$) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!

14. (*) (Módosított shift gráf) Legyen $m > 1$. Az T_m módosított shift gráf csúcsai legyenek az (i, j, k) számhármasok, ahol $1 \leq i < j < k \leq m$. Két csúcs, mondjuk (i, j, k) és (i', j', k') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ és $j = k'$, illetve ha $i' = j$ és $j' = k$. Vagyis ha az egyik hármas első két eleme ugyanaz, mint a másik hármas második két eleme.

a. Bizonyítsuk be, hogy T_m nem tartalmaz háromszöget. b. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(T_m) \rightarrow \infty$ ha $m \rightarrow \infty$.

Házi feladat

Egy G gráf élgráfját $L(G)$ -vel jelöljük.

1. Milyen n -re perfekt az $L(K_n)$ gráf?

2. Perfekt az $L(K_{n,n})$ gráf? És az $L(L(K_{n,n}))$ gráf? (tegyük fel, hogy $n > 2026$.)

3. a. Adjunk meg olyan 2027 csúcsú gráfot, amely nem perfekt, de minden valódi (vagyis kevesebb, mint 2027 csúcsú) feszített részgráfja perfekt.

b. Bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen tulajdonságú 2026 csúcsú gráf.