

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

3. gyakorlat, 2025. október 2.

Dualitás, Whitney

Tudnivalók: G síkbarajzolt gráf duálisa, G^* : Minden tartományba egy csúcsot, bármely két, szomszédos tartománynak megfelelő csúcsot összekötünk minden közös határt képező élen keresztül.

H a G *absztrakt duálisa*: van az élek között bijekció, ami körből vágást, vágásból kört csinál.

H és G *gyengén izomorfak*: van az élek között bijekció, ami körből kört, vágásból vágást csinál.

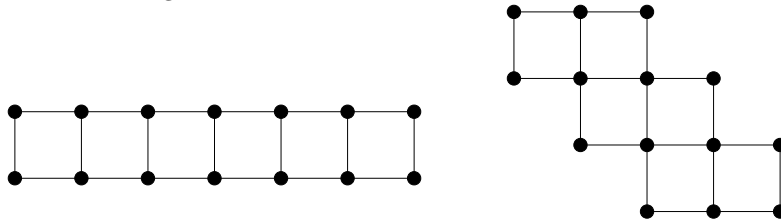
Whitney 1: G -nek van absztrakt duálisa akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Whitney 2: Legyen G síkgráf, G és H gyengén izomorfak. Ekkor

1. H is síkgráf, 2. G^* és H^* gyengén izomorfak, 3. G és G^{**} is gyengén izomorfak.

Whitney 3: Tegyük fel, hogy G és H gyengén izomorfak. Ekkor meg lehet kapni G -ből H -t a következő háromféle operáció ismételt alkalmazásával: (a) Ha a gráfnak van elvágó pontja, akkor a pontnál kettévágjuk a gráfot (az elvágó pont mindkét részben benne lesz). (b) Két diszjunkt gráfot összeragasztunk egy-egy csúcsuknál. Vagyis azonosítjuk a két csúcsot. (c) Ha a gráfnak van két pontja, amik együtt elvágók, akkor itt kettévágjuk a gráfot és megint összeragasztjuk őket, a két pontot megcserélve az egyik komponensben.

1. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



2. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.
3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.
4. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.
5. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n - 6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?
6. Jelölje $F_n = K_{n,n} - nK_2$ azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a $K_{n,n}$ teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen n -ek esetén lesz F_n síkbarajzolható?
7. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G -nek?
8. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?
9. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.
10. A G összefüggő, síkbarajzolt gráfnak 200 éle van, duálisa egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G -nek legfeljebb 100 csúcsa van.
11. A G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van, és nem tartalmaz 3, 4 és 5 hosszú kört. Bizonyítsuk be, hogy G duálisa, G^* , nem egyszerű gráf.
12. Tetszőleges összefüggő síkbarajzolható G gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális G' síkbarajzolt gráfot, aminek G feszített részgráfja.

13. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek $F_1, F_2, \dots, F_t$ a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| - 1)$$

mennyiség maximumát ha G tetszőleges 10 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

14. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G -ben a maximális fokszám 3.
15. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)
16. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhethők ki két színnel, ha minden pont foka páros.

Házi feladat

1. Legyen G egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a G' gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcsot G minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsokat. Ezenkívül kössük össze minden tartománynak megfelelő csúcsot G azon csúcsaival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G') \leq 6$.

Mutassunk olyan G páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett G' gráf kromatikus száma 5.

2. Tetszőleges n csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \dots, d_n$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek $F_1, F_2, \dots, F_t$ a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Legyen

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| - a) + \sum_{i=1}^n (d_i + a).$$

Határozzuk meg a értékét úgy, hogy $s(G)$ értéke ugyanannyi legyen minden 100 csúcsú, egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt G gráfra.