Kombinatorika és gráfelmélet 2.

9+10. gyakorlat, 2024. október 31, november 7.

Erdős-Ko-Rado, Fischer, Sperner, LYM, Erdős-de Bruijn

Erdős-Ko-Rado tétel. (1961) Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ k -uniform halmazrendszer ($k \leq n/2$) azzal a tulajdonsággal, hogy minden $A, B \in \mathcal{F}$-re $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ és ennyi el is érhető.

Fischer egyenlőtlenség. (1940) $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| = \lambda > 0$. Ekkor $m \leq n$.

Ray-Chaudhuri-Wilson tétel. (1975) Legyen $L = \{l_1, l_2, \ldots l_s\}$ és legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \neq j$ esetén $|A_i \cap A_j| \in L$. Ekkor $m \leq \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i}$.

Sperner tétel (1928) $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$, minden $A, B \in \mathcal{F}$–re $A \not\subset B$ és $B \not\subset A$. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Egyenlőség esetén $\mathcal{F}$ éppen $[n]$ összes $\lfloor n/2 \rfloor$, vagy az összes $\lceil n/2 \rceil$ elemű részhalmazából áll.

Erdős – De Bruijn tétel. (1948) $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$, minden $A \in \mathcal{F}$–re $|A| \geq 2$, és tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokhoz pontosan egy $A \in \mathcal{F}$ van, amelyre $i, j \in A$. Ekkor $|\mathcal{F}| = 1$ vagy $|\mathcal{F}| \geq n$.

1. Legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, ahol minden $p_i > 1$ és p_i prímszám. Hány osztóját választhatjuk ki n-nek úgy, hogy semelyik két kiválasztott osztó se legyen relatív prím?

2. Artúr király n lovagját felderítő utakra küldi. Minden nap k lovag megy portyázni. Ugyanaz a csapat nem mehet kétszer és – hogy az információkat mindig mindenki megtudja – nem lehet két csapat, aminek nincs közös tagja. Hány napig lehet így csapatokat összeállítani?

3. Adott síkon m egyenes. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a pontra, es hogy az egyenesek közül semelyik kettő sem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy ezen egyenesek legalább m metszéspontot határoznak meg!

4. Növényvédő szerekkel való kísérletezéshez a következőkre van szükség. Legyen m féle növény és n különböző földterület. Minden területen pont k féle növényt ültetünk, minden növényt pont r területre ültetünk, és minden nyövénypárra pont l olyan terület van, ahol mindenkettő szerepel, $r > l$. Lássuk be, hogy $n \geq m$.

5. Van néhány k elemű halmazunk, bármely kettő pontosan l pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik elemet legfeljebb csak k halmaz tartalmazza.

6. Egy 100 elemű halmaznak 20 és 80 elemű részhalmazait választjuk ki úgy, hogy bármely kettő metszi egymást. Legfeljebb hány részhalmazt lehet így kiválasztani?

7. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek 2^{n-1} tagja van és ezek közül semelyik kettő sem diszjunkt, akkor léteznek $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olyan tagjai a rendszernek, amiknek pontosan egy közös elemük van.

8. Egy páros gráf két osztálya A és B. Bármely két A–beli pontnak pontosan 97 közös szomszédja van, és bármely két B–beli pontnak pontosan 111. a. Mutassunk ilyen gráfot. b. Bizonyítsuk be hogy nincs ilyen gráf, amelyre $|A| = |B| = 1000$.

9. Tegyük fel, hogy $k < n/2$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan metsző halmazrendszer, amire $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$. Mutassuk meg, hogy $[n]$-nek van olyan i eleme, amit $\mathcal{F}$ minden tagja tartalmaz. (Az Erdős-Ko-Rado tétel egyenlőség esete.)

10. Mutassunk olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert, hogy $\mathcal{F}$ bármely két tagjának metszete legalább két elemet tartalmaz és $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$? Létezhet-e ennél nagyobb halmazrendszer a fenti tulajdonsággal?

    Hasznos igazság: $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k-1}$. (Sőt, $\leq 2^{2k}/\sqrt{k}$ ha k elég nagy.)

11. a. Egy fának legfeljebb hány *összefüggő* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak? b. Egy fának legfeljebb hány *feszített* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak?

12. Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan halmazrendszer, ami nem tartalmaz $s+1$ hosszú láncot (azaz $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{s+1}$ halmazokat). Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq s$, ahol f_k a k méretű halmazok számát jelöli.

13. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2n]}$ olyan metsző halmazrendszer, amely minden tagjának páros az elemszáma. Mutassuk meg, hogy ha n páros, akkor $\mathcal{F}$-nek legfeljebb 2^{2n-2} tagja lehet.

14. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak bármely két éle diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Legfeljebb hány éle lehet $\mathcal{H}$-nak?

15. Legfeljebb hány klubot alapíthat MOD-3-FALVA n lakója? Ha A_i jelöli az i-dik klub tagságát, akkor $|A_i| \not\equiv 0 \pmod 3$ és minden $i \neq j$-re $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod 3$. (*)

16. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf nem tartalmaz kört, azaz nincs olyan páronként különböző csúcsokból és hiperélekből álló $x_1, E_1, x_2, E_2, \ldots x_k, E_k, x_{k+1} = x_1$ sorozat, ahol az E_i él tartalmazza az x_i és x_{i+1} csúcsokat. Mutassuk meg, hogy ha $\emptyset$ nem éle $\mathcal{H}$-nak és $\mathcal{H}$ összefüggő is (azaz V nem állítható elő két diszjunkt nemüres V_1 és V_2 halmaz uniójaként úgy, hogy minden hiperél valamelyik V_i halmaz része), akkor igaz, hogy $\sum\{|E|-1 : E \in \mathcal{E}\} = |V| - 1$.

17. Tegyük fel, hogy $k < n/3$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan k-uniform halmazrendszer, amelyben nincs három páronként diszjunkt halmaz. Mutassuk meg, hogy $|\mathcal{F}| \leq 4\binom{n-1}{k-1}$.

Házi feladat

1. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek nincs két diszjunkt tagja. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathcal{F}$-t tartalmazó $\mathcal{F}' \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer, amire $\mathcal{F}'$ metsző és $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$.

2. Minden $k \geq 1$-re mutassunk olyan k-uniform hipergráfot, amely izomorf a duálisával.

3. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[100]}$ halmazrendszerben bármely három halmaz metszete üres. Határozzuk meg $|\mathcal{F}|$ maximális értékét! ($\mathcal{F}$ egyszerű halmazrendszer, tehát egy részhalmaz csak egyszer lehet benne!)