Kombinatorika és gráfelmélet 2.

6+7. gyakorlat, 2024. október 15, 17.

Ramsey

Ramsey tétel (gráfokra, két színnel): Minden $k, l > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k, l)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve pirossal és kékkel, vagy van egy k csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle piros, vagy egy l csúcsú, amelynek minden éle kék. Erdős–Szekeres: $R(k, l) \le \binom{k+l-2}{k-1}$.

Ramsey tétel (gráfokra, r színnel): Minden $r > 0$, $k_1, k_2, \ldots, k_r > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az $1, 2, \ldots, r$ színekkel, valamilyen $1 \le i \le r$ számra vagy van egy k_i csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle i színű.

Ramsey tétel (k-uniform hipergráfokra, r színnel): Minden $r > 0$, $k \ge 2$, $k_1, k_2, \ldots, k_r > 0$ számokhoz van olyan (legkisebb) $R = R_k(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes k-uniform hipergráf éleit tetszőlegesen kiszínezve az $1, 2, \ldots, r$ színekkel, valamilyen $1 \le i \le r$ számra vagy van egy k_i csúcsú teljes rész-hipergráf, amelynek minden éle (k-asa) i színű.

Schur tétel: Minden $t > 0$-ra létezik olyan $N = N(t)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, N$ számokat t színnel, mindig lesznek olyan x, y, z egyszínű számok, amelyekre $x + y = z$.

Van der Waerden tétel: Minden $t, k > 0$-ra létezik olyan $N = N(t, k)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, N$ számokat t színnel, mindig lesz egy k tagú számtani sorozat, amelynek a tagjai egyszínűek.

Erdős-Szekeres Tétel: Minden n-hez létezik olyan $F(n)$ szám, amelyre teljesül, hogy $F(n)$ általános helyzetű pont között a síkon mindig található n konvex helyzetben.

1. Mutassuk meg, hogy minden legalább 10 csúcsú G gráfra $\omega(G) \ge 4$ vagy $\alpha(G) \ge 3$.
2. Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 3, 3) \le 17$ és azt is, hogy $R(3, 4) = 9$.
3. a. Egy teljes gráf éleit kiszíneztük pirossal és kékkel. Bizonyítsuk be, hogy van egy feszítőfa, amelynek minden éle ugyanolyan színű.

   b. Igaz az állítás feszítőfa helyett Hamilton úttal is?
4. Igazoljuk, hogy $R_3(4, 4) \le 21$.
5. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget: $R_3(k, l) \le R_2(R_3(k-1, l), R_3(k, l-1)) + 1$. Ez (nagyságrendileg) milyen felső korlátot ad $R_3(k, k)$-ra?
6. Igazoljuk, hogy $c \ge 3$ esetén $R_t(n_1, n_2, \ldots, n_c) \le R_t(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, R_t(n_{c-1}, n_c))$ teljesül.
7. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a Van der Waerden tétel igaz 2 szín felhasználásával, mutassuk meg ebből, hogy igaz 3 színnel is, sőt több színnel is.
8. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1, X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik. Igaz-e az állítás, három diszjunkt részhalmazra?
9. Legyen $H(V, E)$ egy k–uniform hipergráf, amelynek kevesebb mint 2^{k-1} éle van. Bizonyítsuk be, hogy H csúcsai kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy semelyik él sem egyszínű.
10. (Végtelen Ramsey tétel) Egy végtelen sok csúcsú teljes gráf éleit kiszíneztük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van egy végtelen sok csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.
11. Mutassuk meg, hogy ha G n csúcsú, egyszerű gráf, akkor $\max(\alpha(G), \omega(G)) \ge 1 + \log_4 n$.

12. A sík pontjait kiszínezte valaki pirosra, fehérre és zöldre. Igazoljuk, hogy mindenképpen keletkezett egyszínű, egymástól egységnyi távolságban levő pontpár!

13. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy mindkét színt használta. Mutassuk meg, hogy mindenképpen keletkezett egymástól egységnyi távolságban levő pontpár, melynek egyik tagja piros, a másik zöld! Igaz-e, hogy a sík ilyen kiszínezésekor biztosan található olyan egységoldalú szabályos háromszög, aminek csúcsai egyszínűek?

14. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy nincs két zöld pont egymástól egységtávolságra. Legyen T egy tetszőleges háromszög. Bizonyítsuk be, hogy van egy T-vel egybevágó háromszög, amelynek mind a három csúcsa piros.

15. Legyen a_n a természetes számok tetszőleges szigorúan növő végtelen sorozata. Mutassuk meg, hogy talalható akármilyen hosszú részsorozat, amelyben bármely két elem relatív prím, vagy semelyik két elem sem relatív prím.

16. Bizonyítsuk be, hogy minden $t > 0$-ra létezik olyan $M = M(t)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, M$ számokat t színnel, mindig lesznek olyan x, y, z egyszínű számok, amelyekre $x + y = z$ és $x \neq y$.

17. Bizonyítsuk be, hogy minden $t, k > 0$-ra létezik olyan $M = M(t, k)$ szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, M$ számokat t színnel, mindig lesz egy k tagú mértani sorozat, amelynek a tagjai egyszínűek.

18. Kiszínezhetők-e az egész számok két színnel úgy, hogy ne létezzen egyszínű végtelen számtani sorozat? Hát mértani?

19. Mutassunk olyan $(k-1)^2$ pontú gráfot, amelyben nincs sem teljes k-as sem üres k-as!

20. P egy olyan síkbeli ponthalmaz, amelyben bármely két pont közötti távolság elgész és nincs az összes pont egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy P véges sok pontból áll.

21. Bizonyítsuk be, hogy minden n-hez létezik olyan $K(n)$, hogy tetszőleges $K(n)$ különböző pont a síkon legalább n különböző távolságot határoz meg.

22. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha kiszínezzük a $1, 2, 3, \ldots, N(k)$ számokat k színnel, akkor található három egyszínű szám, x, y, z, amelyekre $x + y = 2z$.

Házi feladat

1. Döntsük el, hogy igaz-e a következő állítás. Minden $n \geq 1$–hez van olyan N, hogy akárhogyan színezzük ki az N elemű halmaz összes részhalmazát két színnel, található olyan n elemű részhalmaz, amelynek az összes részhalmaza ugyanolyan színű.

2. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1, X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik. Igaz-e az állítás, három diszjunkt részhalmazra?

3. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha kiszínezzük a $2, 3, \ldots, N(k)$ számokat k színnel, akkor található három egyszínű szám, x, y, z, amelyekre $x + y = z + 1$.