Kombinatorika és gráfelmélet 2.

5. gyakorlat, 2024. október 8.

Listaszínezés

Tudnivalók:

G minden v csúcsához tartozik egy $L(v)$ színlista. G L-színezhető, ha van olyan (jó) színezése, ahol minden v csúcs színe, $c(v) \in L(v)$.

G listaszínezési száma $ch(G)$ a legkisebb k, amelyre igaz, hogy ha minden v-re $|L(v)| = k$, akkor G L-színezhető.

Minden G-re $\chi(G) \leq ch(G)$, és minden k-ra van olyan G, hogy $\chi(G) = 2$ de $ch(G) > k$.

Minden G-re $ch(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Listaszínezési sejtés: Ha G élgráf, akkor $\chi(G) = ch(G)$.
Galvin tétel: Ha G páros gráf élgráfja, akkor $\chi(G) = ch(G)$.
Thomassen 94: Ha G síkgráf, akkor $ch(G) \leq 5$.
Voigt 93: Van olyan G síkgráf, amelyre $ch(G) = 5$.

1. Határozzuk meg $ch(K_{2,4})$ értékét. ($K_{2,4}$ a két színosztályában 2 és 4 pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)

2. Igaz-e, hogy ha $\chi(G) = ch(G)$, akkor $\chi(\overline{G}) = ch(\overline{G})$?

3. Igaz-e, hogy ha a G gráf minden csúcsához adott egy legalább $ch(G)$ méretű színlista, akkor G alkalmas csúcssorrend esetén mohón kiszínezhető úgy, hogy minden csúcsnak a listáján szereplő legkisebb olyan színt választjuk, ami nem azonos az eddig megszínezett, az adott csúccsal szomszédos csúcsok valamelyikének színével?

4. Legyen $K_{2,2,\ldots,2}$ az a gráf, aminek komplementere n diszjunkt él. Határozzuk meg a $ch\left(K_{2,2,\ldots,2}\right)$ listaszínezési számot.

5. Mutassunk olyan gráfot, ami egyetlen gráfnak sem élgráfja.

6. Mutassuk meg, hogy ha G élgráf, akkor $ch(G) \leq 2\chi(G) - 1$.

7. Igazoljuk, hogy ha a véges, egyszerű G gráf minden v csúcsára $|L(v)| > d(v)$ teljesül, akkor G L-listaszínezhető. ($d(v)$ jelöli a v csúcs fokszámát.)

8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges T legalább két pontú fára $ch(T) = 2$.

   2. Bizonyítsuk be, hogy ha C páratlan hosszú kör, akkor $ch(C) = 3$.

9. Tetszőleges G gráfra legyen $3G$ a következő gráf. Vesszük G három diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a különböző példányokban összekötjük.

   Bizonyítsuk be, hogy ha G síkgráf, akkor a $3G$ gráf listaszínezési száma legfeljebb 7. (Vagyis $ch(3G) \leq 7$.)

10. Egy G gráfot sikerült lerajzolni úgy, hogy összesen egy él-metszés van. Bizonyítsuk be, hogy

    a. $ch(G) \leq 6$,

    b. $ch(G) \leq 5$.

11. Jelölje $\chi''(G)$ a G gráf teljes kromatikus számát, azaz a minimális színszámot, ami szükséges érvényes teljes színezéshez úgy, hogy a csúcsokat és az éleket is színezzük, azzal a feltétellel, hogy érintkező elemek (összekötött csúcsok, közös csúccsal rendelkező élek, egy él és annak egy végpontja) nem lehetnek azonos színűek. Igazoljuk, hogy a listaszínezési sejtésből következne, hogy $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$ minden G gráfra. (Listaszínezési sejtés: Ha G élgráf, akkor $\chi(G) = ch(G)$.)

12. G egy síkgráf, amelynek legalább 4 csúcsa van. Van 7-féle színünk, $\{1, 2, \ldots, 7\}$, ezekkel ki akarjuk színezni a csúcsokat. De valaki megelőzött minket, és kiszínezett 4 csúcsot, amelyek egy teljes 4-est feszítenek, az 1, 2, 3, illetve 4 színekkel. Bizonyítsuk be, hogy be tudjuk fejezni a színezést, vagyis ki tudjuk színezni a többi csúcsot az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ színekkel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek.

13. A G gráfból bárhogy elhagyunk 4 élt, a kapott gráf síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy G listaszínezési száma, $ch(G) \leq 6$.

14. A G síkgráf minden csúcsához tartozik egy 5 hosszú színlista, kivéve egy csúcsot, amelyhez 1 hosszú lista tartozik. Bizonyítsuk be, hogy G kiszínezhető az adott listákról.

15. Tetszőleges G gráfra legyen G' a következő gráf. Felveszünk G-hez egy plusz csúcsot, amit G minden csúcsával összekötünk.

    a. Bizonyítsuk be, hogy minden G-re $\chi(G') = \chi(G) + 1$.

    b. Bizonyítsuk be, hogy minden G-re $ch(G) \leq ch(G') \leq ch(G) + 1$.

    c. Adjunk olyan G gráfot, amelyre $ch(G') = ch(G) + 1$.

    d*. Adjunk olyan G gráfot, amelyre $ch(G') = ch(G)$.

Házi feladat

1. Bizonyítsuk be, hogy $ch(K_{n,n^n}) = n + 1$ minden pozitív egész n-re. (K_{n,n^n} a két színosztályában n és n^n pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)

2. Bizonyítsuk be, a Brooks tétel listaszínezéses változata nélkül, hogy ha C páros hosszú kör, akkor $ch(C) = 2$.