Kombinatorika és gráfelmélet 2.

4. gyakorlat, 2024. október 1.

továbbra is Dualitás, Whitney

Tudnivalók: G síkbarajzolt gráf duálisa, G^*: Minden tartományba egy csúcsot, bármely két, szomszédos tartománynak megfelelő csúcsot összekötünk minden közös határt képező élen keresztül.

H a G *absztrakt duálisa*: van az élek között bijekció, ami körből vágást, vágásból kört csinál.

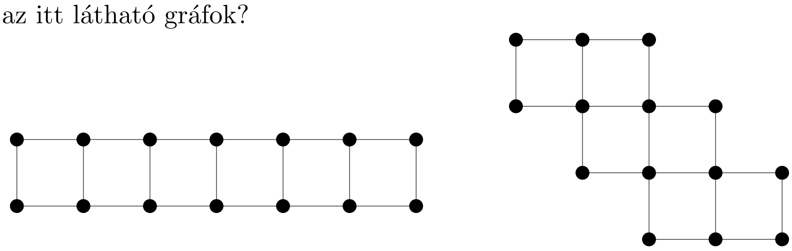
H és G *gyengén izomorfak*: van az élek között bijekció, ami körből kört, vágásból vágást csinál.

Whitney 1: G-nek van absztrakt duálisa akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Whitney 2: Legyen G síkgráf, G és H gyengén izomorfak. Ekkor
1. H is síkgráf, 2. G^* és H^* gyengén izomorfak, 3. G és G^{**} is gyengén izomorfak.

Whitney 3: Tegyük fel, hogy G és H gyengén izomorfak. Ekkor meg lehet kapni G-ből H-t a következő háromféle operáció ismételt alkalmazásával: (a) Ha a gráfnak van elvágó pontja, akkor a pontnál kettévágjuk a gráfot (az elvágó pont mindkét részben benne lesz). (b) Két diszjunkt gráfot összeragasztunk egy-egy csúcsuknál. Vagyis azonosítjuk a két csúcsot. (c) Ha a gráfnak van két pontja, amik együtt elvágók, akkor itt kettévágjuk a gráfot és megint összeragasztjuk őket, a két pontot megcserélve az egyik komponensben.

1. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



2. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.
3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.
4. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.
5. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n - 6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?
6. Jelölje $F_n = K_{n,n} - nK_2$ azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a $K_{n,n}$ teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen n-ek esetén lesz F_n síkbarajzolható?
7. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?
8. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?
9. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.
10. A G összefüggő, síkbarajzolt gráfnak 200 éle van, duálisa egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb 100 csúcsa van.
11. A G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak $n \geq 3$ csúcsa van, és nem tartalmaz 3, 4 és 5 hosszú kört. Bizonyítsuk be, hogy G duálisa, G^*, nem egyszerű gráf.
12. Tetszőleges összefüggőf síkbarajzolható G gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális G' síkbarajzolt gráfot, aminek G feszített részgráfja.

13. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek $F_1, F_2, \ldots, F_t$ a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 1)$$

mennyiség maximumát ha G tetszőleges 10 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

14. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G–ben a maximális fokszám 3.

15. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)

16. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.

Házi feladat

1. Egy egyszerű, összefüggő síkbarajzolt gráf minden tartománya ötszög (a végtelen taromány is). Bizonyítsuk be, hogy nem lehet pontosan 100 csúcsa.

2. Határozzuk meg $ch(K_{4,10000})$ értékét! ($ch(G)$ G listaszínezési száma. $K_{r,s}$ egy teljes páros gráf, az egyik osztályban r, a másik osztályban s csúccsal)