Kombinatorika és gráfelmélet II

Zárthelyi, 2021. november 17, 10.15-11.45

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Adott n (különböző) pont a síkon, ezek megfelelnek a G gráf csúcsainak. Két csúcs akkor és csak akkor van összekötve G-ben, ha a megfelelő pontok által meghatározott egyenes vízszintes vagy függőleges. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

Húzzuk be a pontokon keresztül az összes vízszintes és függőleges egyenest. Legyenek $v_1, \dots, v_k$ a vízszintes és $f_1, \dots, f_m$ a függőleges egyenesek. Legyen M a következő $k \times m$-es mátrix. Az i-edik sor j-edik oszlopába írjunk 1-et akkor és csak akkor, ha v_i és f_j metszéspontjában van pont, ha nincs, akkor meg írjunk 0-t. 4 pont

Az M egy H páros gráfot definiál, és G éppen H élgráfja! (Az 1-esek, vagyis a pontok éppen H éleinek felelnek meg, és két pont pontosan akkor van összekötve, ha a megfelelő éleknek van közös végpontja.) 3 pont

Viszont tudjuk, hogy a páros gráfok élgráfjai perfektek, és ezzel beláttuk az állítást. 3 pont

2. G egy 6 csúcsú gráf, amely két háromszög diszjunkt uniója. Határozzuk meg G összes absztrakt duálisát!

Legyenek az egyik háromszög élei a_1, a_2, a_3, a másiké b_1, b_2, b_3. Legyen G' egy absztrakt duális. G' élei bijekcióban állnak ezekkel az élekkel, tehát legyenek G' élei a_1', a_2', a_3', b_1', b_2', b_3'. 2 pont

G-ben a_1, a_2 vágást alkot, ezért a_1', a_2' kört alkot, vagyis párhuzamos élek. Hasonlóan a_1, a_3 illetve a_2, a_3 is vágást alkot, tehát a_1', a_2', a_3' párhuzamos élek. Ugyanígy, b_1', b_2', b_3' is párhuzamos élek. 3 pont

Viszont tetszőleges i, j-re, G-ben a_i és b_j nem alkot vágást, ezért G'-ben a_i' és b_j' nem alkot kört, vagyis nem párhuzamos élek. (Másképp: Mivel a_1, a_2, a_3 kört alkot G-ben, a_1', a_2', a_3' vágást alkot G'-ben, ezért a_1', a_2', a_3', b_1', b_2', b_3' nem párhuzamos élek.) 2 pont

Összefoglalva: G'-ben van három párhuzamos él egy x és egy y csúcs között, másik három párhuzamos él egy u és egy v csúcs között, x, y, u, v lehet 4 különböző csúcs, vagy x és y közül valamelyik megegyezhet u és v közül valamelyikkel. Ezenkívül több él nincs, de lehet tetszőleges számú izolált pont. 3 pont

3. Adjunk meg olyan G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, $ch(G) = 4$.

Tanultuk, hogy a K_{n,n^n} listaszínezési száma $n + 1$. 3 pont

Tehát $ch(K_{3,27}) = 4$. 2 pont

Ezzel már csak az a baj, hogy $\chi(K_{3,27}) = 2$ hiszen páros gráf. Tegyünk mellé egy háromszöget, amelynek a kromatikus száma és listaszínezési száma is 3. 3 pont

Tehát legyen G egy $K_{3,27}$ és egy háromszög diszjunkt uniója. Ekkor $\chi(G) = 3$, $ch(G) = 4$. 2 pont

4. a. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy R szám a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki a K_R teljes gráf éleit 3 színnel, található olyan háromszög, amelynek az élei legfeljebb két különböző színnel vannak színezve.

b. Határozzuk meg a legkisebb ilyen tulajdonságú R számot.

a. Először belátjuk, hogy $6 = R(3,3) \geq R$. Tekintsünk egy 6 csúcsú teljes gráfot és színezzük ki az éleit tetszőlegesen pirossal, fehérrel és zölddel. Be kell látnunk, hogy mindenképpen keletkezett legfeljebb kétszínű háromszög. Vonjunk össze két színt: a fehér és a zöld éleket színezzük át világoszöldre. Mivel $R(3,3) = 6$, biztosan lesz egy egyszínű háromszög. Ha piros, akkor ez az eredeti színezésben is piros. Ha világoszöld, akkor ez az eredeti színezésben fehér és zöld volt. 5 pont

b. Most belátjuk, hogy $R = 5$. Tekintsünk először egy teljes 4 csúcsú gráfot az a, b, c, d csúcsokkal. Legyen ab és cd piros, ac és bd fehér, ad és bc zöld. Ebben a színezésben minden háromszögben mind a három szín szerepel, mert semelyik két egyszínű élnek nincs közös csúcsa. 2 pont

Most tekintsünk egy 5 csúcsú teljes gráfot és színezzük meg az éleit pirossal, fehérrel és zölddel. Legyen v_1 az egyik csúcs. Mivel négy él megy ki belőle, kettő közülük egyforma színű. Mondjuk v_1v_2 és v_1v_3 is piros. De ekkor a $v_1v_2v_3$ háromszög legfeljebb kétszínű. 3 pont

5. Legyen G egy 7 pontú gráf, amely egy K_5 és egy él diszjunkt uniója. Határozzuk meg $ex(G, 100)$ értékét.

A $T_{100,4}$ Turán gráfban nincs K_5, ezért G sincs, mint részgráf. A $T_{100,4}$-nek $6 \cdot 25^2 = 3750$ éle van, tehát $ex(G, 100) \geq 3750$. 4 pont

Most legyen H egy 3751 élű, 100 csúcsú gráf. A Turán tétel szerint, mivel több éle van mint a $T_{100,4}$ Turán gráfnak, található benne egy K_5, legyenek ennek a csúcsai $v_1, \ldots, v_5$. 3 pont

Tegyük fel, hogy nincs benne G, mint részgráf. Ekkor H minden további éle a $v_1, \ldots, v_5$ csúcsok valamelyikére illeszkedik. De ilyen élből csak $5 \cdot 95 = 475$ van, tehát H-nak legfeljebb $475 + 10 = 485$ éle lehetne, ami ellentmondás. Ezért H tartelmazza G-t, mint részgráfot. Ezzel beláttuk, hogy $ex(G, 100) = 3750$. 3 pont

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[10]}$, és tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$ akkor $A \cap B \neq \emptyset$, és ha $A, B, C \in \mathcal{F}$ különböző halmazok, akkor $A \cap B \cap C = \emptyset$. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{F}| \leq 5$.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots A_m\}$. Az első felételből következik, hogy minden i, j $(1 \leq i < j \leq m)$ párhoz van egy k, $1 \leq k \leq 10$ úgy, hogy $k \in A_i \cap A_j$. Vagyis bármely két halmaz metszetében van egy elem. 3 pont

Ugyanakkor a második feltételből meg az következik, hogy két különböző párhoz két különböző elem tartozik. Különben lenne három halmaz aminek a metszete nem üres. 4 pont

Tehát van legalább $\binom{m}{2}$ különböző elem, vagyis $\binom{m}{2} \leq 10$. Ebből azonnal adódik, hogy $m \leq 5$. 3 pont