Kombinatorika és gráfelmélet 2.

12. gyakorlat, 2021. november 24.

Homogén lineáris rekurziók

Fibonacci számok: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és minden $n > 1$-re $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Ekkor

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

1. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_1 = 0 \;\; a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurziót.
2. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = -3 \;\; a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ rekurziót.
3. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0 \;\; a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ rekurziót.
4. Hányféleképpen mehetünk fel egy n fokból álló lépcsőn egyes és kettes lépésekkel?
5. Hányféleképp lehet lefedni egy $2 \times n$-es táblát 1×2-es és 2×2-es dominók felhasználásával?
6. Oldjuk meg az $a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ *nem homogén* lineáris rekurziót.
7. Tegyük fel, hogy valamilyen K számra $a_n = 2Ka_{n-1} - K^2a_{n-2}$.

   a. $a_0 = 1$, $a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = K^n$.

   b. $a_0 = 0$, $a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = nK^n$.
8. Adjuk meg állandó együtthatós lineáris rekurzióval c_n-t, ha $c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-\sqrt{17}-3}{2}\right)^n$.
9. Legyen $a_1 = 0$ és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + n^2 - 1$. Adjuk meg a_n értékét zárt alakban. Ugyanez a feladat $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ esetén.
10. Oldjuk meg az $a_0 = 1,\ \ a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ rekurziót.
11. Legyen $g_0 = 1$ és $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \ldots + (n-1)g_1 + ng_0$. Adjuk meg g_n-t zárt alakban.
12. Mi a generátorfüggvénye az $1, 1, 1, \ldots$, az $1, 2, 4, 8, \ldots$, az $1, 2, 3, 4, \ldots$ és az $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ sorozatoknak?
13. Hogyan írhatók fel a c_n sorozat elemei az a_n, és b_n sorozat elemeivel, ha generátorfüggvényeikre teljesül, hogy $C(x) = A(x)B(x)$.
14. Jelentse $g(n)$ az origóból induló olyan önmagát nem metsző n hosszú séták számát, melyekben minden lépés egy egységnyi északi, keleti vagy nyugati irányban. Fejezzük ki $g(n)$ értékét!
15. Legyen az $a_0, a_1, \ldots$ sorozatra $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = x$. Határozzuk meg, hogy milyen x–re lesz $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Házi feladat

1. Bizonyítsuk be, hogy $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ill., hogy $F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$. ($F_n$ a Fibonacci sorozat n-dik elemét jelöli.)

2. Mutassuk meg, hogy $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1},$.