Rekurziók, generátorfüggvények

Fibonacci számok: $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

(kezdeti érték + homogén lineáris rekurzió.)

$\Downarrow$

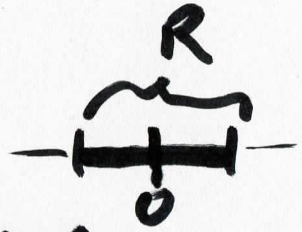
$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

Biz: generátorfüggvénnyel, majd másképp

$a_0\ a_1 \dots$ sorozat. Generátorfüggvénye:

$$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

konvergens:



itt: akárhányszor diff.

Tipikus műveletek:

$a_0, a_1 \dots \Rightarrow F(x)$

$a_1, a_2 \dots \Rightarrow \dfrac{F(x)-a_0}{x}$

$0, a_0, a_1 \dots \Rightarrow x \cdot F(x)$

$a_1, 2a_2, 3a_3 \dots \Rightarrow F'(x)$

$b_0 \dots \Rightarrow G(x)$

$c_i = \sum_j a_j b_{i-j} \Rightarrow F(x)G(x)$

Módszer: összefüggésből, rekurzióból: egyenlet $F(x)$-re

$\Rightarrow F(x) \Rightarrow a_0 \dots$ sorozat.

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ Fibonacci 1202

$$\underline{F(x) = \sum_0^\infty F_i x^i}$$

(könnyen látszik indukcióval: $F_i < 2^i$
$\Rightarrow$ hatványsor konv, ha $|x| < \frac{1}{2}$)

$$F(x) = \sum_0^\infty F_i \cdot x^i = F_0 + F_1 x + \sum_2^\infty F_i \cdot x^i = x + \sum_2^\infty F_i \cdot x^i =$$

$$= x + \sum_2^\infty F_{i-1} x^i + \sum_2^\infty F_{i-2} x^i = x + x \cdot \sum_2^\infty F_{i-1} x^{i-1} + x^2 \cdot \sum_2^{10} F_{i-2} x^{i-2}$$

$$= x + x F(x) + x^2 F(x) = x + (x + x^2) F(x)$$

$$F(x) = x + (x + x^2) F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x)\left(1-x-x^2\right)=x$$

$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_0^\infty\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i\cdot x^i-\sum_0^\infty\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\cdot x^i\right)$$

$$\Downarrow$$

$$F_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right)$$

Másik módszer: $F_0=0 \quad F_1=1 \quad F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$

Karakterisztikus egyenlet: $x^2=x+1$.

Gyökei: $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Áll: $F_n=x_1^n$ illetve $F_n=x_2^n$ sorozat kielégíti a rekurziót.

$$x_1^{n+1}=x_1^n+x_1^{n-1} \iff x_1^2=x_1+1 \quad ✓$$
$$x_2^{n+1}=x_2^n+x_2^{n-1} \iff x_2^2=x_2+1 \quad ✓$$

Viszont akkor $F_n=\lambda_1 x_1^n+\lambda_2 x_2^n$ is minden λ_1, λ_2-re.

Meghatározzuk λ_1 λ_2-t, úgy, hogy a kezdeti feltételek telj.

$F_0=0$: $\lambda_1\cdot x_1^0+\lambda_2\cdot x_2^0=0 \qquad \lambda_1+\lambda_2=0$

$F_1=1$: $\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2=1 \qquad \lambda_1\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\lambda_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \lambda_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \lambda_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Általánosan:

$r_0\ r_1 \dots$ sorozat, $r_0\ r_1 \dots r_{p-1}$ adottak.

$$r_n = \sum_{1}^{p} c_i \cdot r_{n-i} \quad (n \geq p) \qquad R(x) = \sum r_i x^i$$

$$R(x) = r_0 + r_1 x + \dots r_{p-1} x^{p-1} + \sum_{p}^{\infty} r_i x^i = r_0 + \dots r_{p-1} x^{p-1} + \sum_{i=p}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{p} c_j r_{i-j} \right) x^i \dots$$

$$R(x) = \frac{q(x)}{1 - \sum_{1}^{p} c_j x^j} \rightsquigarrow R(x) = \dots$$

Vagy: $r_0 \cdots r_{p-1}$ adottak, $n \ge p$: $r_n = \sum_1^p c_i \cdot r_{n-i}$

Karakterisztikus egyenlet: $x^p = \sum_1^p c_i x^{p-i}$

Megoldások: $x_1\ x_2 \cdots x_p$ **tfh különbözők!**

$r_n = x_i^n$ kielégíti a rekurziót!

$r_n = \lambda_1 x_1^n + \cdots \lambda_p x_p^n$ is!

$\lambda_1 \cdots \lambda_p$: kezdeti értékekből:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \lambda_1 + \cdots \lambda_p \\ &\vdots \\ r_i &= \lambda_1 x_1^i + \cdots \lambda_p x_p^i \\ &\vdots \\ r_{p-1} &= \lambda_1 x_1^{p-1} + \cdots \lambda_p x_p^{p-1} \end{aligned}\right\}$$

Egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & \cdots & x_p^0 \\ x_1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{p-1} & & x_p^{p-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(Vandermonde det.)

Ha vannak többszörös gyökök:

$x_1 \cdots x_\ell$ $\quad x_i$: k_i-szoros gyök.

$k_1 + \cdots k_\ell = p$.

$r_n = x_1^n$, $r_n = n \cdot x_1^n$, $r_n = n^2 \cdot x_1^n$, $\cdots$ $r_n = n^{k_1 - 1} \cdot x_1^n$ kielégítik a rekurziót!

(x_n a kar. egyenlet 1, 2, ⋯ k_1-1 -ik deriváltjának is gyöke!)

$\Rightarrow$ kezdeti értékekből megint p egyenlet $\rightsquigarrow$ $\lambda_1 \cdots \lambda_p$