Halmazrendszerek

Halmazrendszer: alaphalmaz részhalmazainak családja.

Más szóval: hipergráf.

k-uniform hipergráf: minden hiperél (részhalmaz) k elemű.

2-uniform hipergráf = gráf.

Alaphalmaz: A. halmazok: $\mathcal{F}$ Ha A n elemű:

általában feltehetjük, hogy $A = \{1, 2 \dots n\} = [n]$

$2^A = 2^{[n]}$: $A = [n]$ összes részhalmazainak a családja.

<u>Turán típusú problémák</u>: gráf, max él, ha valamilyen tiltott részgráf van.

<u>Extremális halmazrendszerek</u>: max hány hiperél (részhalmaz) bizonyos feltételekkel.

Pl: $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, bármely $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ (diszjunktak)

$\Rightarrow \max |\mathcal{F}| = n+1$ (n db 1 elemű + üres)

$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, bármely $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ (nincs két diszjunkt)

$\Rightarrow \max |\mathcal{F}| = 2^{n-1}$ (minden A-ra A és $\bar{A}$ közül csak az egyik lehet $\mathcal{F}$-ben.

Ennyi lehet is: pl egy konkrét elemet tartalmazó részhalmazok)

Erdős-Ko-Rado 1961: $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ k-uniform, metsző halmazrendszer, $k < \frac{n}{2}$. $(\forall A \in \mathcal{F} : |A| = k,\ \forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \neq \emptyset)$

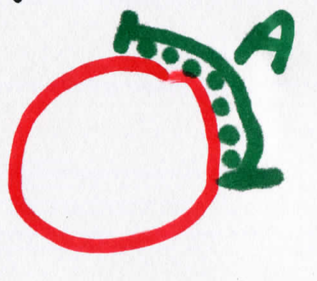
Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

$\binom{n-1}{k-1}$ el is érhető: egy konkrét elemet tartalmazó k-asok.

EKR biz (Katona Gyula 1972)

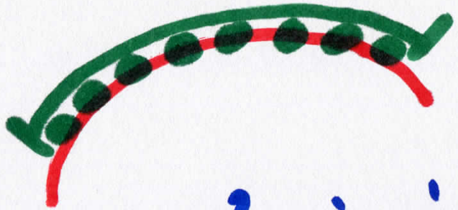
$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$. π: alaphalmaz ciklikus permutációja

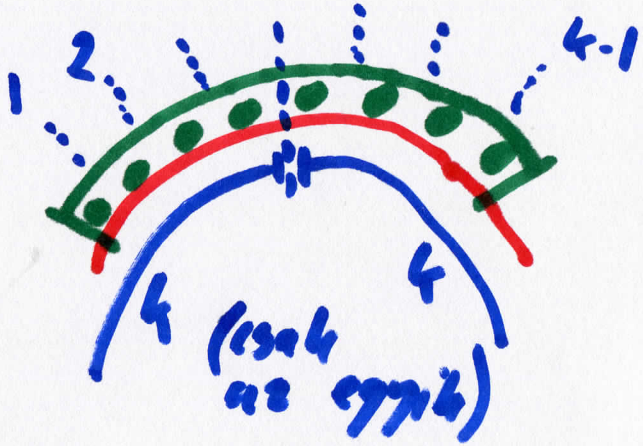
$\underline{\underline{\text{ív}}}$: $A \in \mathcal{F}$, A elemei egymás után vannak π-ben.



Π: fix ciklikus permutáció $\Rightarrow$ max k halmaz alkot ívet.

Egy ívet rögzítünk:





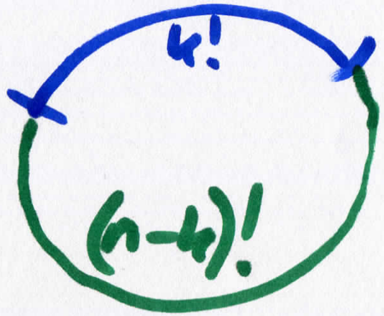
$k-1$ lehetséges végződés,
2 ott végződő ívből max 1:

$\Rightarrow$ összesen max k ív.

Összes ciklikus permutáció: $(n-1)!$

Összesen max $k \cdot (n-1)!$ ívet találunk.

Egy ívet max $k! \cdot (n-k)!$-szor számolunk:



$$\Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

EKR kész

Fischer egyenlőtlenség: $\mathcal{F} = \{A_1 \dots A_m\} \subseteq 2^{[n]}$, $\lambda > 0$.

Minden $i \neq j$: $|A_i \cap A_j| = \lambda$. $\Longrightarrow m \leq n$

Biz: (lineáris algebra módszer)

Nyilván $\forall i$ $|A_i| \geq \lambda$. Tegyük fel, hogy $|A_i| = \lambda$.

Mivel $|A_i \cap A_j| = \lambda$, minden $A_j \supset A_i$, és A_i-n kívül diszjunktak.

$\Longrightarrow$ max $1 + n - \lambda \leq n$ halmaz van ✓

$\rightarrow$ Feltehetjük, hogy minden $|A_i| > \lambda$: $|A_i| = \lambda + \alpha_i$

$\alpha_i > 0$

$\forall i \; |A_i| = \lambda + d_i$, $d_i > 0$. $\quad A_i \subseteq \{1, 2 \dots n\}$

$\overline{a}_i : A_i$ karakterisztikus vektora:

$\overline{a}_i$ j-edik koordinátája $(1 \leq j \leq n)$ $\begin{cases} 0 & \text{ha } j \notin A_i \\ 1 & \text{ha } j \in A_i \end{cases}$

$\left(\text{Pl: } A_i = \{1,2,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\} : \overline{a}_i = (1,1,0,0,1,0)\right)$

A feltételekből: $\quad \overline{a}_i \cdot \overline{a}_j = \begin{cases} |A_i| = \lambda + d_i & \text{ha } i = j \\ |A_i \cap A_j| = \lambda & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

Belátjuk: az $\overline{a}_1 \; \overline{a}_2 \dots \overline{a}_m$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tfh $\sum_1^m c_i \overline{a}_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \overline{a_i} = 0 \qquad / \cdot \overline{a_j}$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \overline{a_i} \cdot \overline{a_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \lambda + c_j \cdot \alpha_j = 0$$

$$\left(\sum_{1}^{m} c_i\right) \cdot \lambda = -c_j \cdot \alpha_j$$

$$\frac{-\lambda}{\alpha_j} \sum_{1}^{m} c_i = c_j$$

Ha $\sum c_i = 0 \Rightarrow \forall c_j = 0$

Ha $\sum c_i > 0 \Rightarrow \forall c_j < 0$

$< 0 \Rightarrow \quad > 0$ $\lightning$

Ez igaz minden j-re.

Tehát $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m$ lin függetlenek, n dim. térben vannak

$$\Longrightarrow \underline{m \leq n}$$

Fischer kész

Ray-Chaudhuri – Wilson: $L = \{\ell_1 \dots \ell_s\}$, $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$,

$\forall A, B \in \mathcal{F}: |A \cap B| \in L$.

$\Rightarrow \quad |\mathcal{F}| \leq \sum_{0}^{s} \binom{n}{i}$.

Ennyi lehet is: legyen $L = \{0, 1, \dots s-1\}$,

$\mathcal{F}$ az $[n]$ összes, legfeljebb s elemű részhalmaza.

Ha $s=1$: RCW: $\quad \forall A, B: |A \cap B| = \ell \Rightarrow \quad |\mathcal{F}| \leq \sum_{0}^{1} \binom{n}{i} = n+1$

Fischer: $\quad \forall A, B: |A \cap B| = \lambda \Rightarrow \quad |\mathcal{F}| \leq n$.

Viszont $\ell \geq 0$, de $\lambda > 0$.

Fischer spec eset: $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $\forall |A \cap B| = 1 \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq n$.

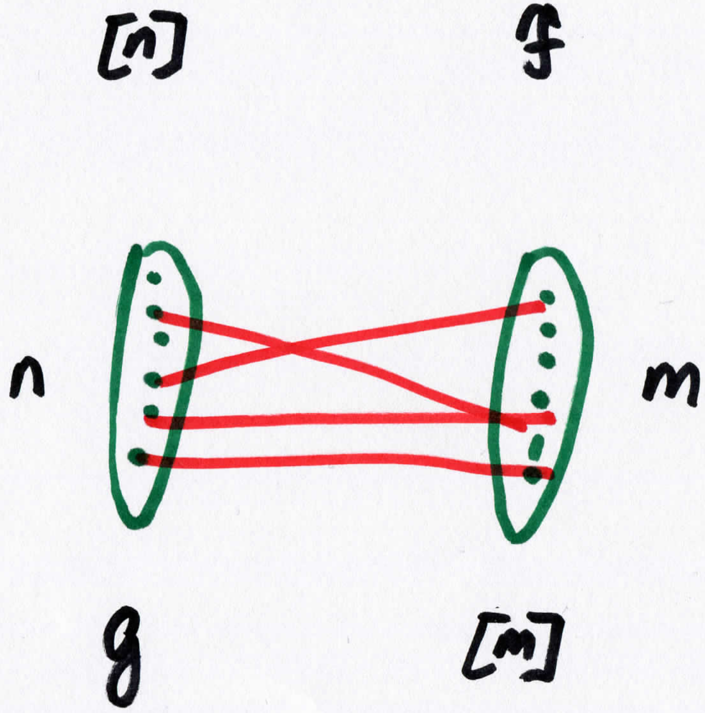
<u>Erdős - de Bruijn</u>: $\mathcal{G} \subseteq 2^{[m]}$, bármely elemhez, $(i<j)$ pontosan egy $A \in \mathcal{G}$, amire $i, j \in A$.

$\Rightarrow |\mathcal{G}| = 1$ vagy $|\mathcal{G}| \geq m$.

A $|\mathcal{G}| = 1$ eset: Egy halmaz, amiben minden benne van.

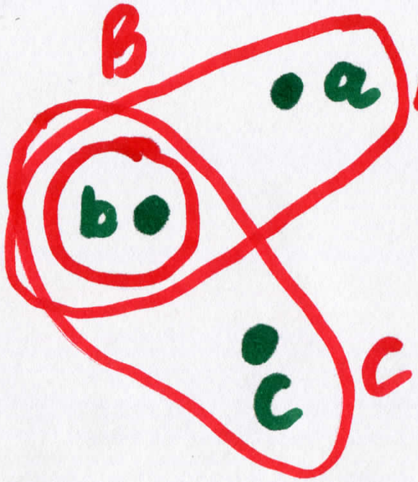
EdB biz: Fischerből

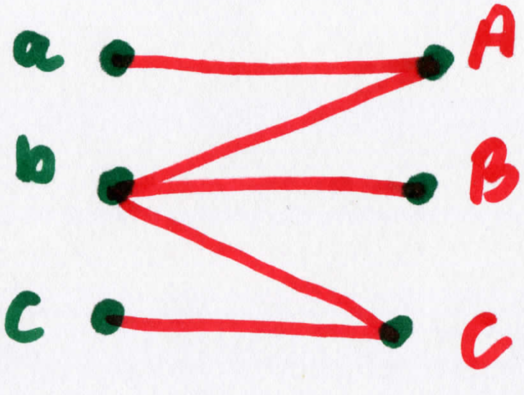
Duális hipergráf. Leggyen $|\mathcal{F}| = m$, $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$

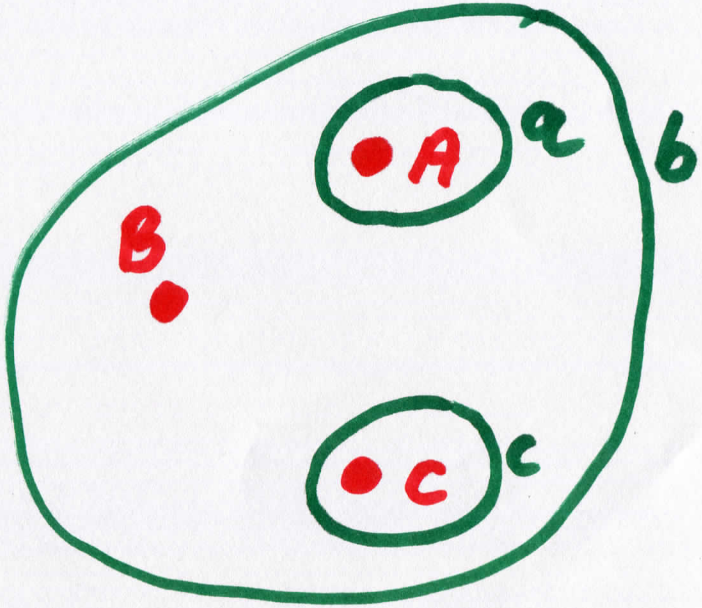


x — y : y tartalmazza x-et.

x — y : x tartalmazza y-t.







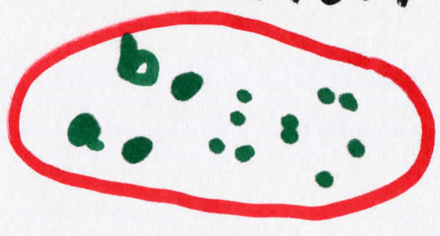
$\mathcal{G} \subseteq 2^{[m]}$, bármely 2 elemet pontosan egy halmaz tartalmaz.
leggyen $|\mathcal{G}| = n$.

EdB: $n = 1$ vagy $n \geq m$.

Duális hipergráf $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$. $[n] \longleftrightarrow \mathcal{G}$ halmazai
$\mathcal{F}$ halmazai $\longleftrightarrow [m]$

<u>1. eset:</u> $\mathcal{F}$-ben van ismétlődés: van $A, B \in \mathcal{F}$, $A = B$
A-ban és B-ben pontosan <u>ugyanazok</u> az elemek vannak
$\Rightarrow$ megfelelő a, b elemeket pontosan <u>ugyanazok</u> a halmazok tartalmazzák $\mathcal{G}$-ben.

$\mathcal{G}$-ben bármely 2 elemhez pontosan 1 halmaz van $\Rightarrow$ pontosan egy halmaz tartalmazza a, b-t, és ez MINDENT tartalmaz: <u>$n = 1$</u>



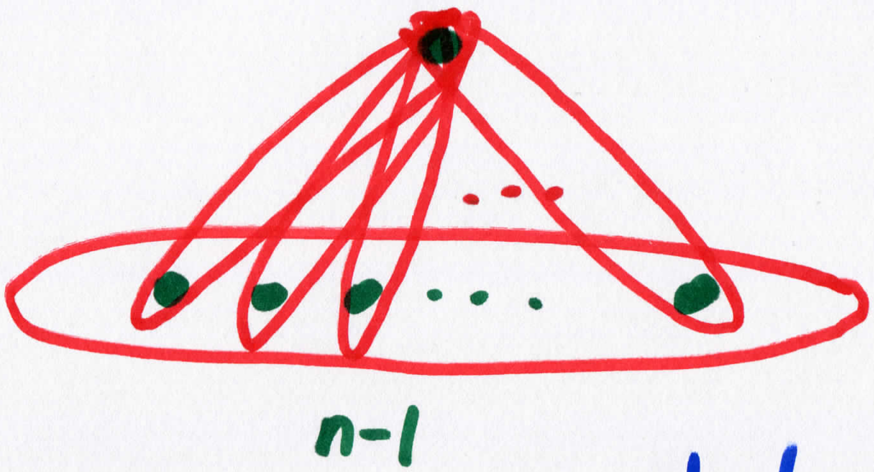
2. eset: $\mathcal{F}$-ben nincs ismétlődés.

$\mathcal{G} \subseteq 2^{[m]}$, $|\mathcal{G}|=n$, bármely 2 elemhez 1 tartalmazó halmaz

$\Downarrow$

$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $|\mathcal{F}|=m$, bármely 2 halmazhoz 1 közös elem

$\Rightarrow$ Fischer $\underline{\underline{n \geq m}}$ EdB kész ✓



„near pencil":

n elem, n halmaz, bármely 2 elemhez 1 halmaz, bármely 2 halmazhoz 1 közös elem.

$\Rightarrow$ Fischer, Erdős-de Bruijn pontosak.