sikgráfrás, dualitás.

Kombi 1 → Sikgráfrás:
Evler formula: \( n - e + t = 1 + k \)
\( n - e + t = 2 \) (összefüggésre)
\( e \leq 3n - 6 \) (egyszerű sikgráfrás)
\( e \leq 2n - 4 \) (egyszerű, páros)

5-szintétel: \( \chi(G) \leq 5 \) ha \( G \) sikgráfrás
4-szintétel (Appel-Haken '76, számítógéppel) optimalis
Kuratowski-tétel: \( G \) sikgráfrás \( \iff \) nem tart. topológiás \( K_5,3 \)-at és \( K_5 \)-öt

Fáry-Wagner: \( G \) sikgráfrás \( \Rightarrow \) kerajzolható metszes nélkül egynapos élekkel.
Legyen $G(V, E)$ sikharajzolt graf. $G^*(V^*, E^*)$ dualis:

$G^*$ csúcsai, $V^*$ $\iff$ $G$ lapjai

$v_1^* v_2^* \cdots v_n^*$

$G^*$ élei, $E^*$ $\iff$ $G$ élei

$e_1, e_2, \ldots, e_n$

$G^*$ összekötő $v_i^*$-t és $v_j^*$-t

$G$ összekötő $v_i$-t és $v_j$-t

Ebben a leckeiben:

graf = multigraf:

lehetnek hurokélek és párhuz. élek.
Vágaš: min. elhalmaz, aminek az elvéttele növeli a komponensek számát.

Elvağı el: egyedül vágašt alkot.

e, e' soros el: \{e, e\} vágaš.

Dualis: lerajzolt grafhoz van! Más lerajzolás → lehet más dualis.

\[ G_1^* \neq G_2^* \]

3,4,3,6    3,5,3,5
G síkbarajzolt, G* dualis.

1. G* összefüggő, síkbarajzolt
2. G és G* elei közé bijeleció
3. G lapjai $\iff$ G* csúcsai
4. soros (párhuzamos) éléhez $\iff$ párhuzamos (soros) éléhez
5. elvágó él (hurok él) $\iff$ hurok él (elvágó él)
6. ha G összefüggő akkor G** = G,
   G csúcsai $\iff$ G* lapjai
7. G köre (vágása) $\iff$ G* vágása (köre)

sikbarajzolt (nincs metszés)

2. $G$, $G^*$ éléi közti bijekció: definícióból trivi

3. $G$ lapjai $\iff G^*$ csúcsai: def.-ből trivi

4. soros élék $\iff$ párhuzamos élék

párhuzamos élék $\iff$ soros élék
5. elvágó e'1 ↔ hurokel'
hurokel' ↔ elvágó e'1

6. G összefüggő:
G csúcsai ↔ G* lapjai

G* minden lapjában van G-nek csúcsa:
n-e+t = 2  n* - e* + t* = 2
e = e*, n* = t  ⇒  t* = n  ⇒  G* minden lapjában G-nek PONTOSAN EGY csúcsa van.

⇒ G** = G
Nem összefüggő G-re nem igaz:

\[ G \Rightarrow G^* \text{ vágaása} \]
\[ G \text{ vágaása} \Leftrightarrow G^* \text{ köre} \]
G, H absztrakt duálisok: $e' \iff e'$

\[ \text{Kör} \iff \text{Vágás} \]

\[ \text{Vágás} \iff \text{Kör} \]

Ebből elegendő az egyik, a másik következik

**G sikgraf:** $G^* \iff G$ absztrakt duálisa.

(trivi)

**Whitney:** G-nek van absztrakt duálisa $\iff G$ sikbanyjosztható.

$\iff$ trivi

$\Rightarrow$ bizt vázlat (ötlet)

Ha G-nek van absztrakt duálisa, akkor a részgrafjai-nah is van.

$e \nexists$ elhagy $\iff$ összehúz
Ha topologikus $K_5$-neki van abstrakt dualísa: $K_5$-nek is van.

Hasonlóan $K_{3,3}$-mal (vagy bármimiről)

Tehát $G$ nem sikgráf és van abstrakt dualísa.

Kuratowski: $G$ tartalmaz top. $K_{3,3}$-át vagy top. $K_5$-öt.

$\implies K_{3,3}$-nak vagy $K_5$-nek is van abstrakt dualísa.

Eleg belátni: $K_{3,3}$-nak és $K_5$-nek NINCS a. dualísa.
$K_5$:  

Öt 4 élű vágás:  

4-1 él közös.

Két vágás - közös él: 6 élű vágás

Abstrakt duális: $H$.

Öt 4 hosszú kör, 4-1 él közös.  

Még egy 4 hosszú kör!

$m_g$ 4 élű vágás!  

$m_s$: HASONLÓAN

$K_{3,3}$:
Whitney: $G$ sikbarajzolható, $G, H$ gyengén izomorf.
1. $H$ is sikbarajzolható.
2. $G^* H^*$ gyengén izomorf
3. $G, G^{**}$ gyengén izomorf

Biz: $G^* G$ egy dualísa $\Rightarrow G^* H$ absztraktt dualísa.

$H \leftrightarrow G \leftrightarrow G^*$
$el \leftrightarrow el \leftrightarrow el$
$kör \leftrightarrow kör \leftrightarrow vágás \leftrightarrow vágás$

$G^* H^*$ gy. izomorf:
$G \leftrightarrow G^{**}$

$H^* \leftrightarrow H \leftrightarrow G \leftrightarrow G^* \leftrightarrow G^{**}$
$el \leftrightarrow el \leftrightarrow el \leftrightarrow el \leftrightarrow el$
$kör \leftrightarrow vágás \leftrightarrow vágás \leftrightarrow kör \leftrightarrow vágás$
$vágás \leftrightarrow kör \leftrightarrow vágás \leftrightarrow kör$

éppen, a másik következik
Whitney:
G, H gyegeén izomorfák. Ekkor G-ből meghatározható H-t a következő 3 operáció ismételt alkalmazásával: