Síkgráfok, dualitás.

Kombi 1 $\longrightarrow$ Síkgráfok: Síkgráf: metszés nélkül lerajz.
(video)

Euler formula: $n-e+t=1+k$

$n-e+t=2$ (összefüggőre)

$e \leq 3n-6$ (egyszerű síkgráf)

$e \leq 2n-4$ (egyszerű, páros)

5-színtétel: $\chi(G) \leq 5$ ha G síkgráf

4-színtétel (Appel-Haken 76, számítógéppel) optimális

Kuratowski tétel: G síkgráf $\Longleftrightarrow$ nem tart. topologikus $K_{3,3}$-at és K_5-öt

Fáry-Wagner: G síkgráf $\Rightarrow$ lerajzolható metszés nélkül egyenes élekkel.

Legyen $G(V,E)$ síkbarajzolt gráf. $G^*(V^*,E^*)$ duális:

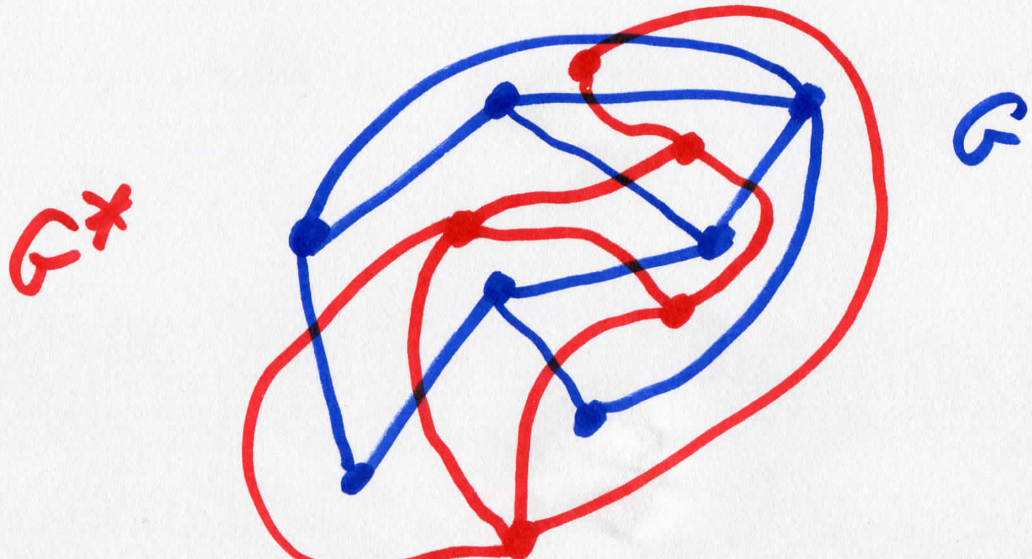
G^* csúcsai, V^* $\Longleftrightarrow$ G lapjai

$v_1^*\ v_2^* \cdots\ v_n^*$ $\qquad$ $l_1\ l_2 \cdots\ l_n$

G^* élei, E^* $\Longleftrightarrow$ G élei

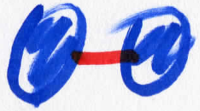
$f_1^*,\ f_2^* \cdots\ f_e^*$ $\qquad$ $f_1\ f_2 \cdots\ f_e$

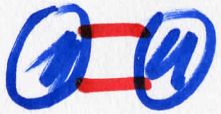
f_i^* összeköti v_j^*-t és v_k^*-t $\qquad$ f_i határolja l_j-t és l_k-t



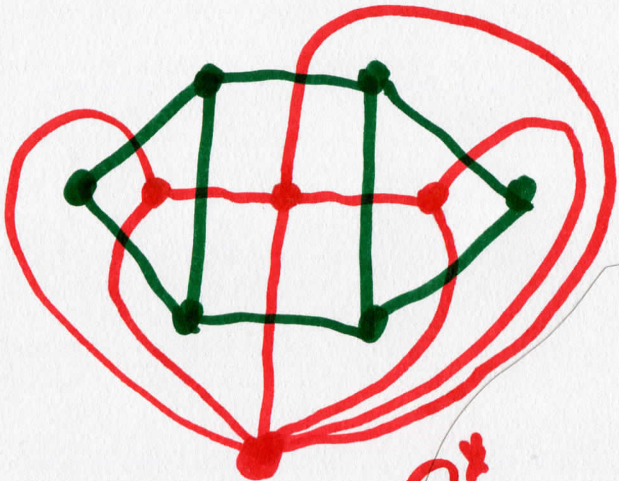
Ebben a leckében: gráf = multigráf: lehetnek hurokélek és párhuz. élek.

Vágás: min. élhalmaz, aminek az elvétele növeli a komponensek számát.

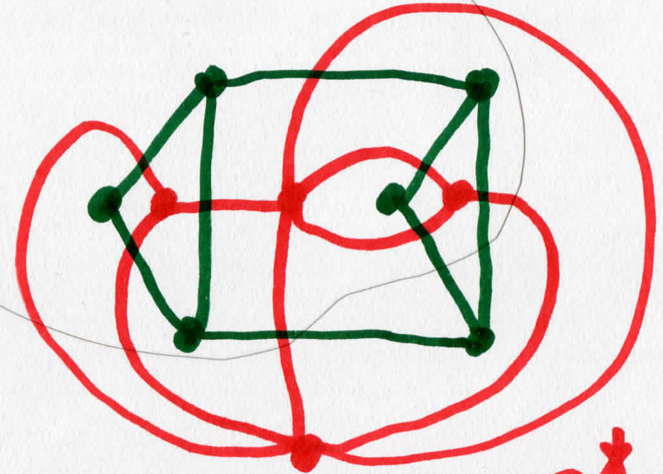
Elvágó él: egyedül vágást alkot. 

e, e' soros él: $\{e, e'\}$ vágás. 

Duális: lerajzolt gráfhoz van! Más lerajzolás → lehet más duális.



G_1^*



G_2^*

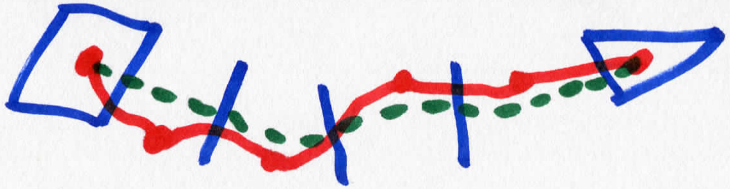
$G_1^* \not\simeq G_2^*$

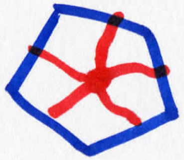
3,4,3,6   3,5,3,5

G síkbarajzolt, G^* duális.

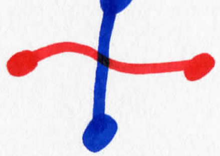
1. G^* összefüggő, síkbarajzolt
2. G és G^* élei közt bijekció
3. G lapjai $\Leftrightarrow$ G^* csúcsai
4. soros (párhuzamos) élek $\Leftrightarrow$ párhuzamos (soros) élek
5. elvágó él (hurokél) $\Leftrightarrow$ hurokél (elvágó él)
6. ha G összefüggő akkor $G^{**} = G$,
   G csúcsai $\Leftrightarrow$ G^* lapjai
7. G köre (vágása) $\Leftrightarrow$ G^* vágása (köre)

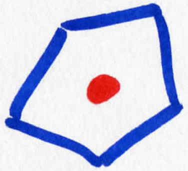
Biz:

1. G^* öf, síkbarajzolt: 

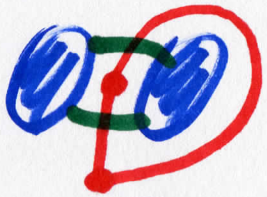


síkbarajzolt (nincs metszés)

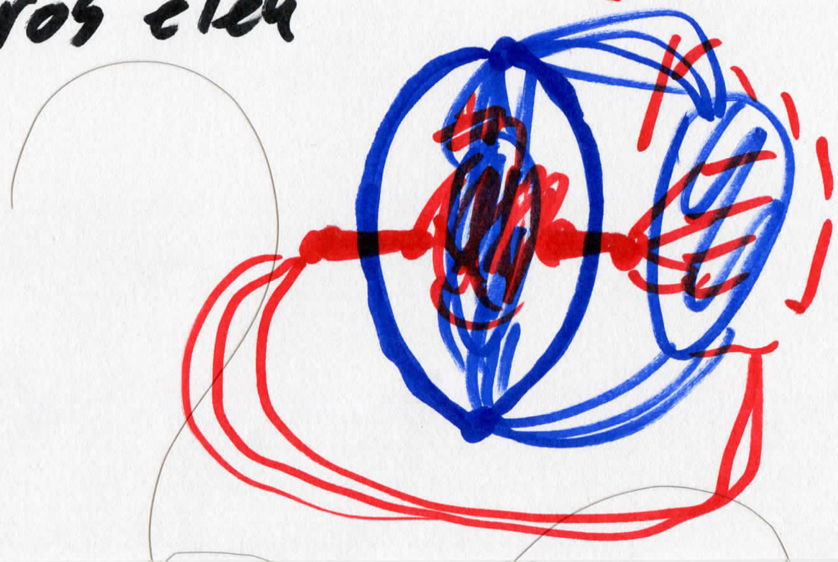
2. G, G^* élei közt bijekció: definícióból trivi 

3. G lapjai $\Leftrightarrow$ G^* csúcsai: def.-ből trivi 

4. soros élek $\Leftrightarrow$ párhuzamos élek

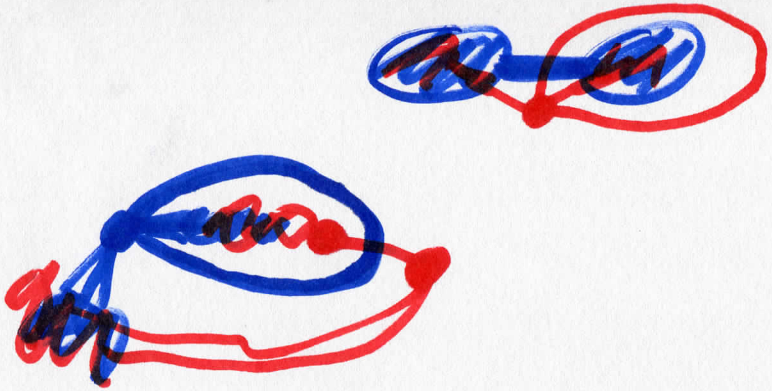


párhuzamos élek $\Leftrightarrow$ soros élek



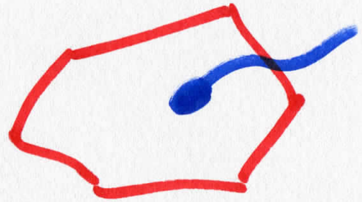
5. elvágó él $\Longleftrightarrow$ hurokél

hurokél $\Longleftrightarrow$ elvágó él



6. G összefüggő:

G csúcsai $\Longleftrightarrow$ G^* lapjai



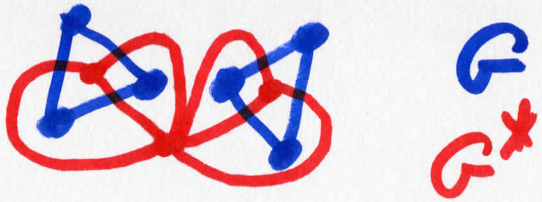
G^* minden lapjában van G-nek csúcsa:

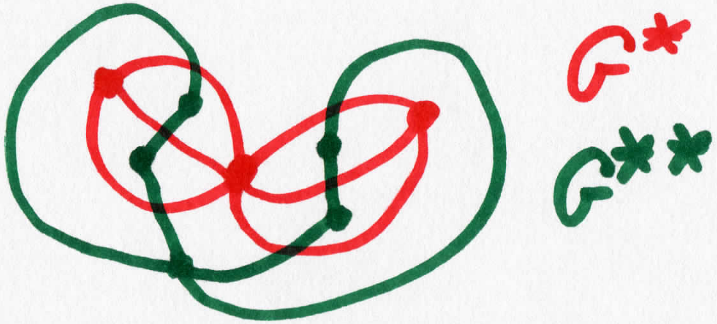
$n-e+t=2 \quad n^*-e^*+t^*=2$

$e=e^*,\ n^*=t \Rightarrow t^*=n \Rightarrow$ G^* minden lapjában G-nek PONTOSAN EGY csúcsa van.

$\Rightarrow G^{**}=G$

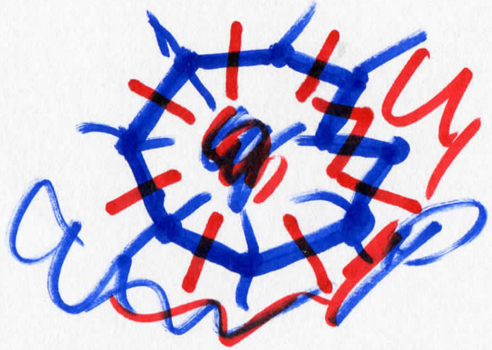
Nem összefüggő G-re nem igaz:

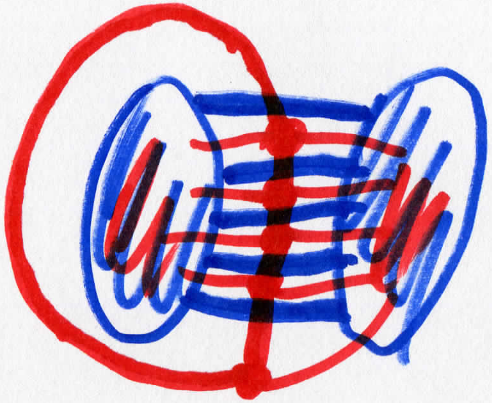




7. G köre $\Leftrightarrow$ G* vágása

G vágása $\Leftrightarrow$ G* köre





G, H absztrakt duálisok: él $\Longleftrightarrow$ él

kör $\Longleftrightarrow$ vágás

vágás $\Longleftrightarrow$ kör

ebből elég az egyik, a másik következik

G síkgráf: G^* G absztrakt duálisa.
(trivi)

Whitney: G-nek van absztrakt duálisa $\Longleftrightarrow$ G síkbarajzolható.

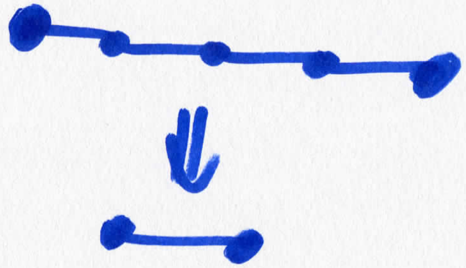
$\Leftarrow$ trivi.

$\Rightarrow$ biz vázlat (ötlet)

Ha G-nek van absztrakt duálisa, akkor a részgráfjainak is van.

e elhagy $\Longleftrightarrow$ e^* összehúz

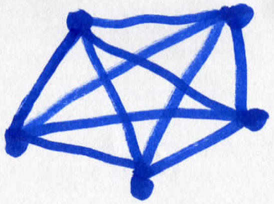
Ha topologikus K_5-nek van absztrakt duálisa:
K_5-nek is van.



Hasonlóan $K_{3,3}$-mal (vagy bármi mással)

Tfh G nem síkgráf és van absztrakt duálisa.
Kuratowski: G tartalmaz top. $K_{3,3}$-at vagy top. K_5-öt.
$\Rightarrow$ $K_{3,3}$-nak vagy K_5-nek is van absztrakt duálisa.

Elég belátni: $K_{3,3}$-nak és K_5-nek NINCS a. duálisa.

K_5: 

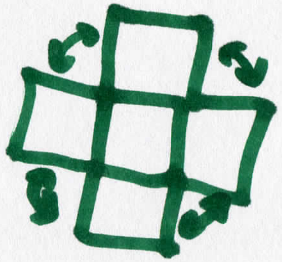
Absztrakt duális: H.

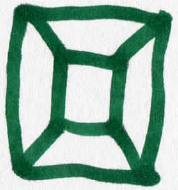
ÖT 4 élű vágás:

1-1 él közös.

Két vágás-közös él: 6 élű vágás

ÖT 4 hosszú kör, 1-1 él közös. 





még egy 4 élű vágás!

még egy 4 hosszú kör!

$K_{3,3}$: HASONLÓAN

G, H <u>gyengén izomorfak</u>:

él ⟺ él
kör ⟺ kör
vágás ⟺ vágás

ebből elég az egyik, a másik következik

Whitney: G síkbarajzolható, G, H gyengén izomorf.

1. H is síkbarajzolható.
2. G^* H^* gyengén izomorf
3. G, G^{**} gyengén izomorf

Biz: G^* G egy duálisa $\Rightarrow$ G^* H absztrakt duálisa.

H ⟷	G ⟷	G^*
él	él	él
kör	kör	vágás
vágás	vágás	kör

$\Rightarrow$ 1. Whitney: H síkbarajzolható.

G^* H^* gy. izomorf:

G G^{**}

H^* ⟷	H ⟷	G ⟷	G^* ⟷	G^{**}
él	él	él	él	él
kör	vágás	vágás	kör	vágás
vágás	kör	kör	vágás	kör

Whitney:

G, H gyengén izomorfak. Ekkor G-ből megkaphatjuk H-t a következő 3 operáció ismételt alkalmazásával: