Részben rendezett halmazok, Dilworth tétel

H halmaz, $\succeq$ reláció.

reflexív: $\forall a \quad a \succeq a$

antiszimmetrikus: $a \succeq b,\ b \succeq a \Rightarrow a = b$

tranzitív $a \succeq b,\ b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$

$\to (H, \succeq)$ <u>részben rendezett halmaz</u> (partially ordered set) (poset) és $\succeq$: részbenrendezés

Jelölés: ha $a \succeq b$ de $a \neq b$: $a \succ b$

$\succ$ reláció: irreflexív : $\forall a \quad a \not\succ a$

antiszimmetrikus

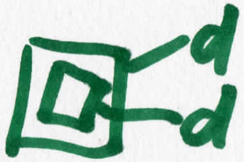
tranzitív

Itt $a \succ b,\ b \succ a \Rightarrow a \succ b \succ a \Rightarrow a \succ a$ ↯

Példa részbenrendezett halmazra: $D=\{d_1 \cdots d_n\}$

papírdobozok. $d_i \succ d_j \iff d_j$ belefér d_i-be.

irreflexív:



↯

tranzitív:

antiszimmetrikus

↯

Papírdobozok helyett nejlonzacskóval nem igaz!

Másik példa: H: sík néhány pontja.

$(x_1, y_1) > (x_2, y_2) \iff x_1 > x_2$ ÉS $y_1 > y_2$

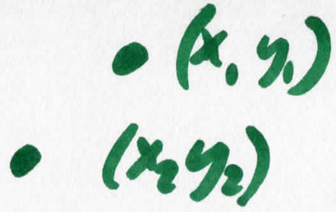
$Q > P$ de Q, R ill. P, R nem összehasonlítható.

Legyen $(H, >)$ poset. $a_1, a_2 \cdots a_k \in H$ láncot alkot ha bármely kettő összehasonlítható.

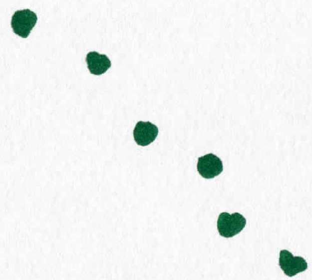
Ekkor $\underline{a_1 > a_2 > \cdots > a_k}$ (lehet, hogy más sorrendben!)

antiláncot alkot, ha semelyik kettő sem összehasonlítható.

Sík pontjai, $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2) \iff x_1 > x_2$ és $y_1 > y_2$

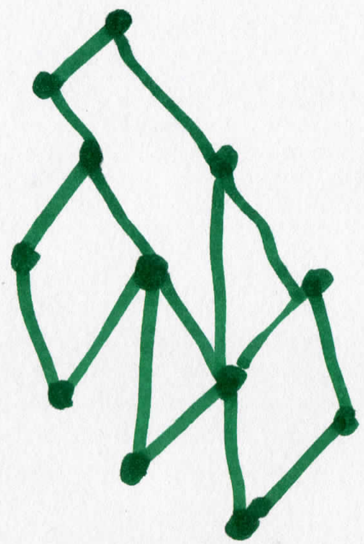


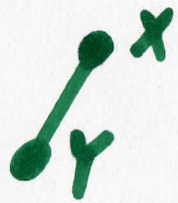
lánc



antilánc

Poset ábrázolás:

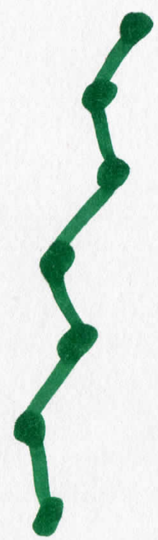




$x \succ y$ és „szomszédosak":

nincs z: $x \succ z \succ y$

lánc:



antilánc:

Dilworth tétel (1950): $(H, \prec)$ poset, a: max antilánc mérete. Ekkor H felbontható a db láncra. Kevesebbre nem.

duális Dilworth (Mirsky) $(H, \prec)$ poset, ℓ: max lánc mérete. Ekkor H felbontható ℓ db antiláncra. Kevesebbre nem.

Kevesebbre nem (mindkettőben) trivi: $|\text{lánc} \cap \text{antilánc}| \leq 1$

$\Rightarrow$ max antilánc minden eleme más láncba kerül

max lánc minden eleme más antiláncba kerül.

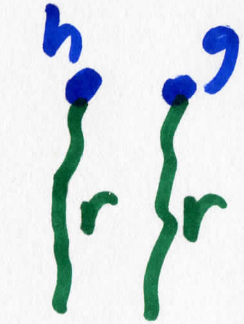
duális Dilworth biz.

Max lánc hossza: ℓ.

Minden $h \in H$-ra $\underline{r(h)}$ = h rangja: max lánc hossza, ami h-ban végződik. Max r: van

$h_1 < h_2 \cdots < h_r = h$

- Minden $h \in H$-ra: $1 \leq r(h) \leq \ell$.
- Ha $r(h) = r(g)$, akkor h, g nem összehasonlítható. (különben $r(h)$ vagy $r(g) \geq r+1$ lenne)



- Legyen $H_i \subseteq H$: $\{h \mid r(h) = i\}$

$H = H_1 \cup \cdots H_r$ és $H_1 \cdots H_r$ antiláncok.

$(H, \prec)$ poset. $(H, \prec)$ összehasonlítás gráfja $G(H, \prec)$:

G csúcsai: H elemei

u, v össze van kötve $\Leftrightarrow$ u, v összehasonlítható $(H, \prec)$-ban.

Áll: $(H, \prec)$ poset $\Longrightarrow G(H, \prec)$ perfekt.
(összehasonlítás gráfok perfektek)

Összehasonlítás gráf feszített részgráfja is ö.h. gráf.
$\longrightarrow$ elég: G ö.h. gráf $\Longrightarrow \chi(G) = \omega(G)$.

$G = G(H, \prec)$. G-ben (max) klikk $\Longleftrightarrow$ H-ban (max) lánc.
G színezése (k színnel) $\Longleftrightarrow$ H felbontása (k db) antiláncra.

duál. Dilworth: H: max lánc k $\Leftrightarrow$ H felb. k antiláncra, kevesebbre nem
$\omega(G) = k \Leftrightarrow \chi(G) = k$

összehasonlítás gráf, G perfekt $\Longleftrightarrow$ nem-összehasonlítás gráf, $\bar{G}$ perfekt.

gyenge perfekt gráf tétel

$G = G(H, \prec)$

$\bar{G}$-ben (max) klikk $\Longleftrightarrow$ H-ban (max) antilánc

$\bar{G}$ színezése (k színnel) $\Longleftrightarrow$ H felbontása (k db) láncra.

$\bar{G}$ perfekt: $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$

max antilánc H-ban: ℓ. $\Rightarrow \omega(\bar{G}) = \ell \Rightarrow \chi(\bar{G}) = \ell$

$\Rightarrow$ H felbomlik ℓ láncra, kevesebbre nem

Ez volt a Dilworth tétel bizonyítása!

Dilworth tétel direkt bizonyítás. a: max antilánc mérete,
$\Rightarrow$ H felbomlik a db láncra.

Indukció n-re ($n = |H|$). $n=1$ ✓

Tfh $n > 1$, kevesebbre már megvan.

L: max lánc. $H \setminus L$: max antilánc mérete a
vagy $a-1$.

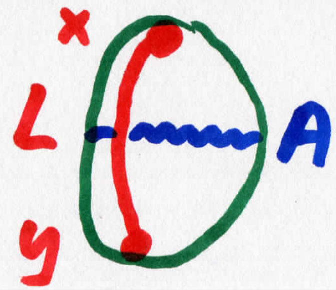
Ha $a-1$: indukció: $H \setminus L$ felbomlik $a-1$ láncra
$+ L$: a db lánc, KÉSZ.

$H \setminus L$: max antilánc mérete a.

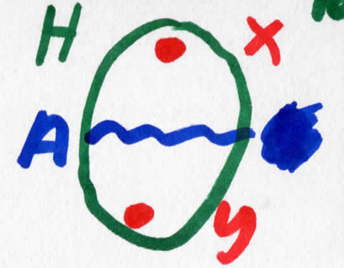
$A = \{h_1 \dots h_a\}$ max antilánc $H \setminus L$-ben.

x: L maximális eleme.

y: L minimális eleme.

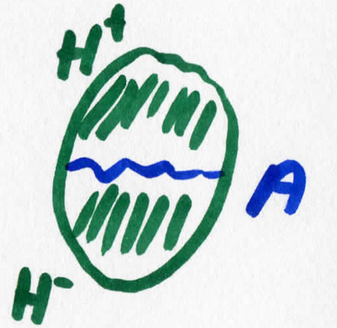


$H^+ = \{h \mid \exists h_i \in A : h \geq h_i\}$ $\quad$ $H^- = \{h \mid \exists h_i \in A : h \leq h_i\}$



1. $\underline{H^+ \cap H^- = A}$: A nyilván benne van. Ha $h \notin A$, $h \in H^+ \cap H^-$: van $h_i\ h_j \in A$:

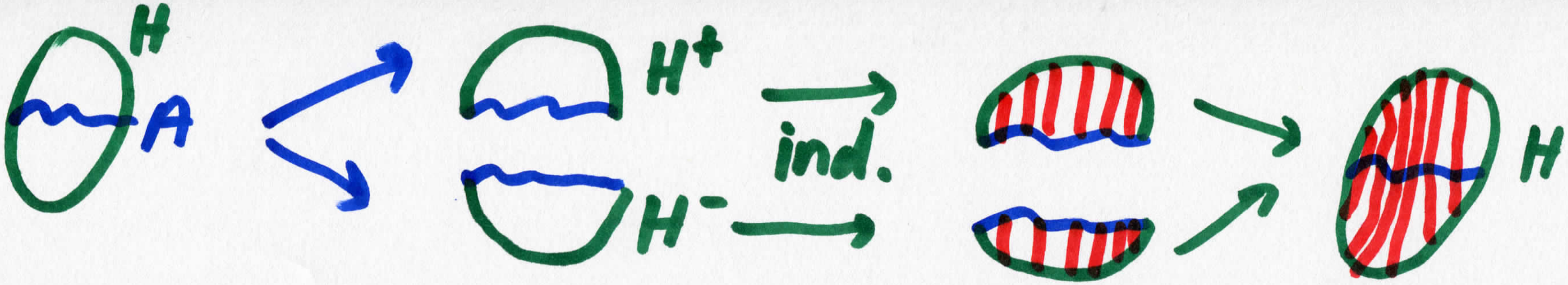
$h_i \leq h \leq h_j \Rightarrow h_i \leq h_j$ ↯ A antilánc



2. $\underline{H^+ \cup H^- = H}$: Ha $h \in H$, $h \notin H^+$, $h \notin H^- \Rightarrow$ h-t hozzávehetjük A-hoz! ↯ mert A <u>max</u> antilánc.

3. $\underline{x \in H^+,\ y \in H^-}$: Ha $x \in H^-$, akkor van $h_i \gneq x \Rightarrow h_i$-t hozzávehetjük L-hez! ↯ mert L max lánc! $y \in H^-$ ugyanígy.

$|H^+|, |H^-| < |H|$, H^+, H^- : max antilánc : a



H^+, H^- : max antilánc : a $\Rightarrow$ felbomlanak a láncra

$\rightarrow$ H is felbomlik, h_i-nél összeillesztjük őket.

(Minden $h_i \in A$ pontosan 1 H^+-láncban és 1 H^--láncban van a felbontásból, és ebben min. illetve max elem