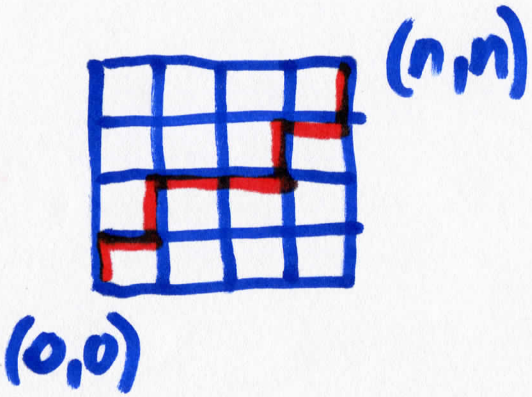
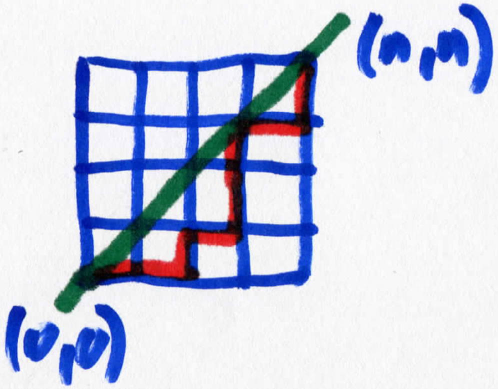
Catalan számok



Hányféleképpen mehetünk (0,0)-ból (n,n)-be, ha mindig jobbra → vagy fölfele ↑ lépünk egyet?

2n lépés, n →, n ↑ tehát $\binom{2n}{n}$



$\boxed{\text{Catalan szám}}\,\boxed{C_n}$: Hányféleképp mehetünk, ha <u>nem megyünk az átló fölé?</u>

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Néhány további def. (vagy feladat, aminek C_n a megoldása)

1. n db nyitó (és n db záró) zárójelből álló érvényes zárójelezések száma.

   (zárójelezés érvényes: nyitó-záró zárójelek párosíthatók úgy, hogy minden párban $(\longleftrightarrow)$ előbb a nyitó és nincs

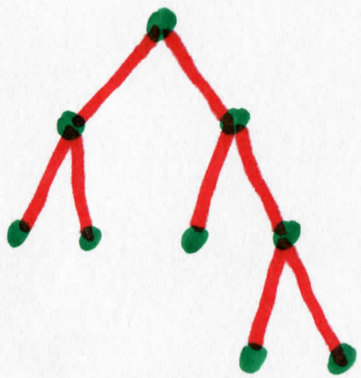
   $\iff$ minden kezdőszeletben legalább annyi nyitó (mint záró)

(()(()))

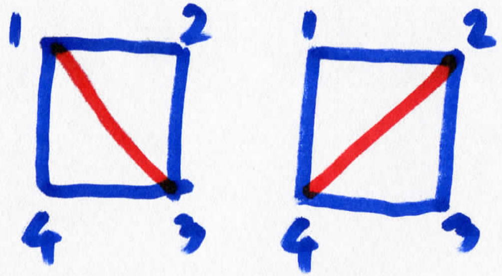
2. Egy n+1 tényezős szorzat zárójelezéseinek a száma.
(nem maradhat 3 egymás utáni tag zárójel nélkül)

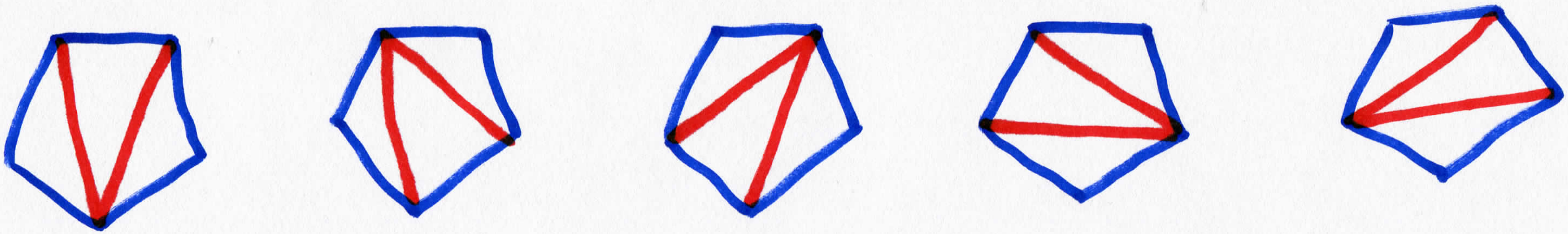
$(a_1 \; a_2)(a_3 \; (a_4 \; a_5))$

3. n+1 levelű, lerajzolt, gyökeres teljes bináris fák száma.

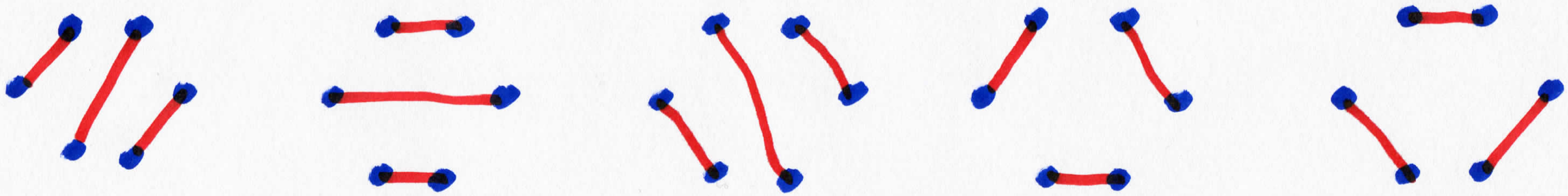


4. Egy n+2 csúcsú (csúcsok számozva) konvex sokszög háromszögeléseinek a száma.





5. Egy $2n$ csúcsú (csúcsok számozva) konvex sokszög csúcsai nem metsző teljes párosításainak a száma.



6. $1, 2 \dots n$ permutációja: $\pi = \pi(1), \pi(2) \dots \pi(n)$

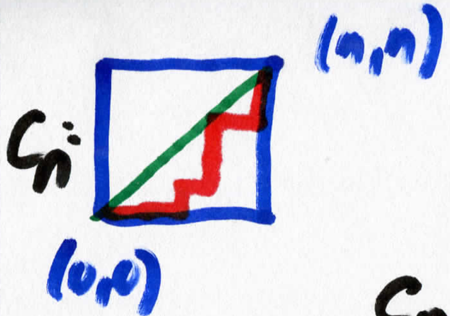
$(1,2,3)$-minta: $i<j<k$, $\pi(i)<\pi(j)<\pi(k)$

$(1,3,2)$-minta: $i<j<k$, $\pi(i)<\pi(k)<\pi(j)$

$(3,2,1)$-minta: $i<j<k$, $\pi(k)<\pi(j)<\pi(i)$

stb, ugyanígy def. hosszabb mintákra is.

M: tetszőleges 3 hosszú minta. Az $1, 2 \dots n$ M-et elkerülő permutációinak a száma: C_n

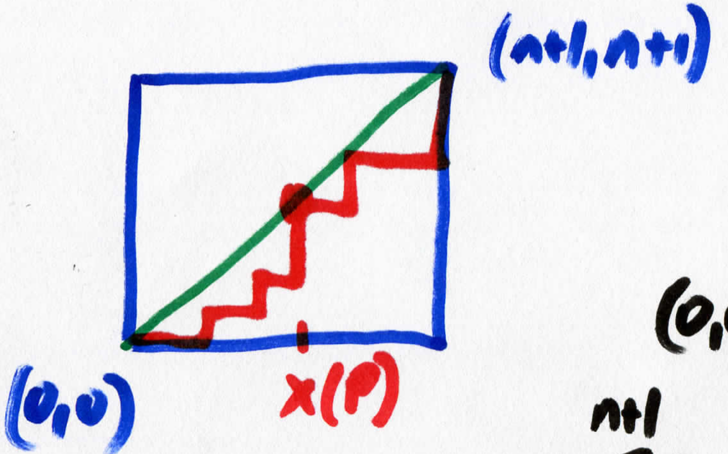


$(0,0)\to(n,n)$ utak száma, amelyek nem mennek az átló fölé. (JÓ UTAK)

$C_0=1$

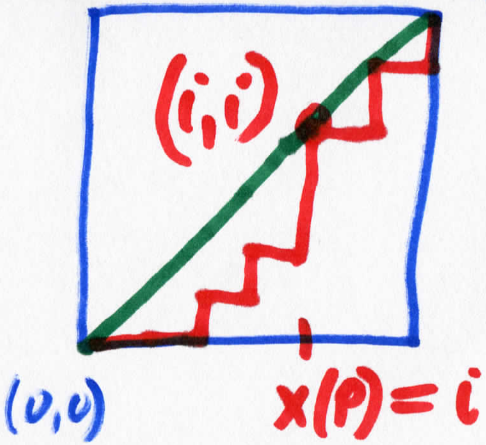
$n\ge 1$: $C_{n+1}=\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$

Biz: Legyen P egy $(0,0)\to(n+1,n+1)$ jó út. $\underline{x(P)}$: $(0,0)$ utáni első pont x-koordinátája, ahol P eléri az átlót. $1\le x(P)\le n+1$.



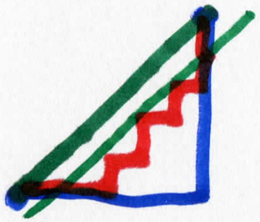
$(0,0)\to(n+1,n+1)$ jó utak száma $=$

$=\sum_{i=1}^{n+1}$ P jó utak száma, ahol $x(P)=i$.



Felső rész: $(i,i) \to (n+1,n+1)$ jó utak száma: C_{n+1-i}

Alsó rész: (i,i) az ELSŐ ahol eléri az átlót:



$(1,0) \to (i, i-1)$, nem megy $(y=x-1)$ fölé: C_{i-1}

$$C_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} \cdot C_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}. \qquad (\text{és } C_0 = 1)$$

Leggyen $C(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ $\left(c_n < \binom{2n}{n} < 4^n, \ |x| < \frac{1}{4}\text{-re konv} \right)$

Kiszámoljuk $C(x)$-et.

$$\binom{c}{k} = \frac{c(c-1)\cdots(c-k+1)}{k!}$$

Binomiális tétel: $(a+b)^n = \sum_0^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \sum_0^\infty \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ $\quad n \geq 0$ egész.

Ált. binom. tétel: c valós:

$$(a+b)^c = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{c}{i} a^i b^{c-i}$$

Biz: $f(x) = (x+b)^c$ függvényt sorba fejtjük 0 körül.

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i$$

$$c(x) = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c(x)^2 = c_0^2 + (c_1c_0 + c_0c_1)x + (c_2c_0 + c_1c_1 + c_0c_2)x^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{x}\left(c_0^2 x + (c_1c_0 + c_0c_1)x^2 + (c_2c_0 + c_1c_1 + c_0c_2)x^3 + \cdots \right)$$

$$\Rightarrow x \cdot c(x)^2 = c_0^2 x + (c_1c_0 + c_0c_1)x^2 + (c_2c_0 + c_1c_1 + c_0c_2)x^3 + \cdots$$

$$1 + x \cdot c(x)^2 = 1 + c_0^2 x + (c_1c_0 + c_0c_1)x^2 + (c_2c_0 + c_1c_1 + c_0c_2)x^3 + \cdots$$

$$= c(x)$$

$$1 + x \cdot c(x)^2 = c(x)$$

$$x \cdot c(x)^2 - c(x) + 1 = 0 \qquad c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}}$$

Mivel $c(0) = 1$:

$$c(x) = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$x \cdot c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} (-4x)^i\right)$$

$$\binom{1/2}{i} = \frac{(1/2)^i (1-2)(1-4)\cdots(1-2i+2)}{i!} = (-1)^{i-1} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots (2i-3)}{i!}$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots (2i-3)}{i!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots (2i-2)}{2^{i-1} \cdot (i-1)!} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{i \cdot 2^{2i-1}} \cdot \frac{(2i-2)!}{(i-1)! \, (i-1)!}$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{i \cdot 2^{2i-1}} \cdot \binom{2i-2}{i-1} = \frac{-2}{i} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^i \cdot \binom{2i-2}{i-1}$$

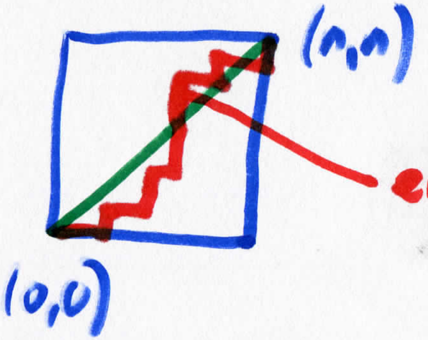
$$x \cdot c(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i \cdot \frac{1}{i} \cdot \binom{2i-2}{i-1} \Longrightarrow \boxed{c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

Tükrözési elv. Biz: $(0,0)\to(n,n)$ jó utak $= C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

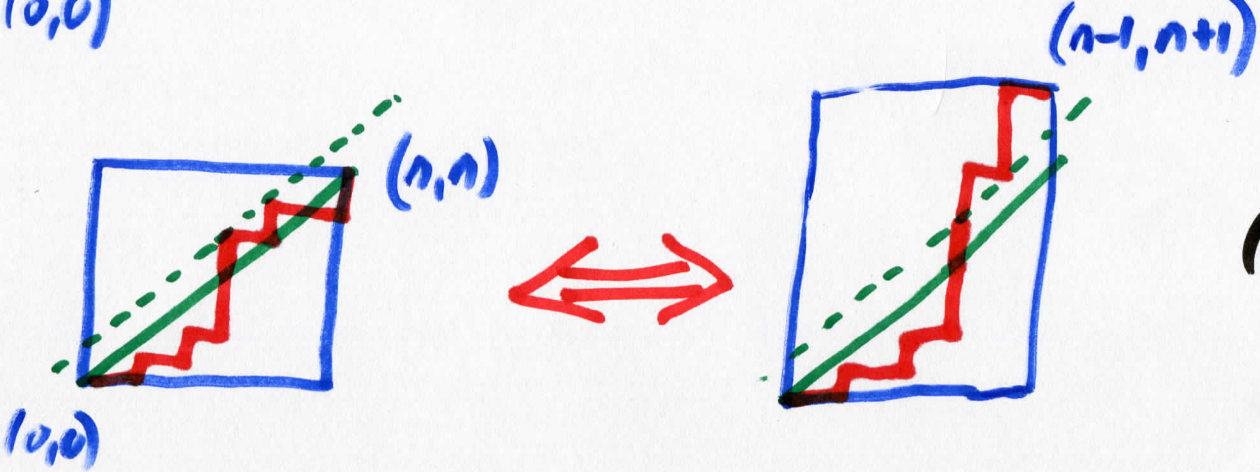
$(0,0)\to(n,n)$ jó utak = összes út − rossz utak

 $\binom{2n}{n}$

számoljuk le a rossz utakat!



első, ahol az átló fölé megy. Innen tükrözzük:



Rossz utak: $\binom{2n}{n-1}$

$(0,0)\to(n,n)$ Jó utak:

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$(0,0)\to(n,n)$ Rossz utak $\Longleftrightarrow$ $(0,0)\to(n-1,n+1)$ ÖSSZES út