Kombinatorika és gráfelmélet I

1. ZH, 2025. április 4. 10.15-11.45, T 601/2.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsokon, amelynek legalább két 34-fokú csúcsa van?

Legyen F egy ilyen fa. A Prüfer kódja 98 hosszú. A 34-fokú csúcsok sorszámai 33-szor szerepelnek. De ebből rögtön látszik, hogy *legfeljebb* két 34-fokú csúcs lehet. 3 pont

Vagyis az olyan fákat akarjuk leszámolni, amelyeknek *pontosan* két 34-fokú csúcsa van. 2 pont

Számoljuk le a megfelelő Prüfer kódokat. Először kiválasztjuk a két 34-fokú csúcsot, ez $\binom{100}{2}$ lehetőség. 1 pont

Ezután az egyiknek meghatározzuk a 33 helyét a Prüfer kódban, ez $\binom{98}{33}$ lehetőség. 1 pont

Majd a másiknak, ez $\binom{65}{33}$ lehetőség. 1 pont

Végül a maradék 32 hely mindegyikére, egymástól függetlenül, 98-féle számot írhatunk. Ez 98^{32} lehetőség. 1 pont

Tehát összesen $\binom{100}{2}\binom{98}{33}\binom{65}{33}98^{32}$ ilyen fa van. 1 pont

2. Egy 100 csúcsú teljes gráf éleit úgy súlyoztuk meg, hogy minden súly pozitív, minden súly különböző, kivéve a legkisebb súlyt, ami *három* élen szerepel.
(Vagyis $\binom{100}{2} - 2$ különböző élsúly van.) Legyen k a minimális összsúlyú feszítőfák száma. Határozzuk meg k lehetséges értékeit.

Tudjuk, hogy a mohó algoritmus lehetséges lefutásai megtalálják az összes minimális feszítőfát. 2 pont

Tegyük fel, hogy e_1, e_2 és e_3 a három egyforma, egyben legkisebb súlyú él, $s(e_1) = s(e_2) = s(e_3)$. Először mindenképpen ezt a három élt vizsgálja a mohó algoritmus valamilyen sorrendben. 1 pont

Ha e_1, e_2 és e_3 nem alkot kört, akkor mindenképpen bevesszük mind a három élt a minimális feszítőfába. Innen pedig a mohó algoritmus futása egyértelmű. 3 pont

Ha pedig kört alkotnak, akkor egy kimarad közülük, ez három lehetőség. És innen megint csak egyféleképpen futhat tovább az algoritmus. 3 pont

Tehát k lehetéges értékei 1 és 3. 1 pont

3. A G egy 22 csúcsú egyszerű reguláris gráf (minden fokszám ugyanannyi). Bizonyítsuk be, hogy G vagy komplementere, $\overline{G}$ tartalmaz Hamilton kört.

Legyen d a közös fokszám G-ben. Ekkor $\overline{G}$ is reguláris, minden fokszám $\overline{d} = 21 - d$. 3 pont

Tehát $d \geq 11$ vagy $\overline{d} \geq 11$. 3 pont

Tehát G-re vagy $\overline{G}$-re alkalmazhatjuk a Dirac tételt, amely garatálja, hogy G-ben vagy $\overline{G}$-ben van Hamilton kör. 4 pont

4. (G, s, t, c) egy hálózat. Az e_1 él kapacitása $c(e_1) = x$, az e_2 él kapacitása $c(e_2) = y$. Az összes többi e élhez adott egy-egy $c(e) > 0$ kapacitás. Adott $x, y > 0$ számokra legyen $M(x, y)$ a maximális folyam nagysága. Tudjuk, hogy $M(10, 10) = 6$, $M(1, 10) = M(10, 1) = 1$. Határozzuk meg $M(5, 5)$ értékét.

Mivel $M(10, 10) = 6$, itt a minimális vágás 6. Ez nyilván nem tartalmazza a e_1 és e_2 éleket, hiszen ezeknek itt 10 a kapacitása. Tehát a legkisebb, e_1-et és e_2-t nem tartalmazó vágás kapacitása 6. 3 pont

Legyen most $x = 1$, $y = 10$. Ekkor a minimális vágás 1. Ez nem tartalmazhatja e_2-t, e_1-et viszont tartalmaznia kell (mert ha e_1-et sem tartalmazza, akkor 6 a minimális vágás). De ekkor viszont ez a vágás *csak* az e_1 élt tartalmazza.
3 pont

Hasonlóan kapjuk, hogy van egy vágás, amely *csak* az e_2 élt tartalmazza. 1 pont

Most pedig legyen $x = y = 5$. Ekkor az e_1-et tartalmazó vágások közül a legkisebb a csak e_1-et tartalmazó, kapacitása 5. Hasonlóan az e_2-t tartalmazó vágások közül a legkisebb a csak e_2-t tartalmazó, kapacitása 5. Végül a se e_1-et, se e_2-t tartalmazó vágások közül a legkisebb kapacitása 6. Tehát $M(5, 5) = 5$. 3 pont

5. G egy 3-pontösszefüggő 2025 csúcsú gráf, u, v két csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy legfeljebb 675 hosszú (legfeljebb 675 élű) utat u-ból v-be.

1. megoldás: Menger 5-ik tétele alapján u és v között van 3 pontidegen út. 5 pont

De ekkor az egyikhez G u-tól és v-től különböző 2023 csúcsainak legfeljebb a harmada, $\lfloor 2023/3 \rfloor = 674$ csúcs tartozik. Ez az út pedig legfeljebb 675 hosszú. 5 pont

2. megoldás: Ha G a teljes gráf, akkor u és v között van él, ekkor készen vagyunk. 1 pont

Ha nem, akkor tudjuk, hogy u és v elvásztásához legalább 3 pontot el kell hagynunk G-ből. Vagyis az uv utakat lefogó pontok minimális száma legalább 3. Ebből Menger (1-4) tétele alapján tudjuk, hogy u és v között van 3 pontidegen út.
4 pont

De ekkor az egyikhez G u-tól és v-től különböző 2023 csúcsainak legfeljebb a harmada, $\lfloor 2023/3 \rfloor = 674$ csúcs tartozik. Ez az út pedig legfeljebb 675 hosszú. 5 pont

6. G csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_9$, H csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_9$.

a. G-ben az u_i és u_j, $1 \leq i < j \leq 9$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - j| = 1$. Határozzuk meg $\tau(G)$-t.

b. H-ban a v_i és v_j, $1 \leq i < j \leq 9$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - j| = 1$ vagy 2. Határozzuk meg $\tau(H)$-t.

($\tau(G)$ a lefogó pontok minimális száma.)

a. Tekintsünk egy L lefogó ponthalmazt G-ben. Világos, hogy L az (u_1, u_2), (u_3, u_4), (u_5, u_6), (u_7, u_8) párok mindegyikéből legalább egyet tartalmaz, tehát $\tau(G) \geq 4$. 2 pont

Ugyanakkor az u_2, u_4, u_6, u_8 csúcsok lefogják az összes élt, ezért $\tau(G) = 4$. 2 pont

b. Tekintsünk egy L lefogó ponthalmazt H-ban. Világos, hogy L a (v_1, v_2, v_3), (v_4, v_5, v_6), (v_7, v_8, v_9) hármasok mindegyikéből legalább kettőt tartalmaz, tehát $\tau(G) \geq 6$. 3 pont

Ugyanakkor a $v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$ csúcsok lefogják az összes élt, ezért $\tau(G) = 6$. 3 pont