

Kombinatorika és gráfelmélet I  
**2. PótzH**, 2024. május 24. 10.15-11.45

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A  $G$  gráf csúcsai az  $(i, j)$  rendezett számpárok, ahol  $1 \leq i, j \leq 3$ . Két különböző csúcs,  $(i, j)$  és  $(k, l)$  össze van kötve éllel akkor és csak akkor, ha  $i = k$  vagy  $j = l$ . Határozzuk meg a  $\nu(G)$ ,  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\rho(G)$  mennyiségeket.

Ennek a gráfnak 9 csúcsa van. A  $v_{1,1}v_{1,2}$ ,  $v_{2,1}v_{2,2}$ ,  $v_{3,1}v_{3,2}$ ,  $v_{1,3}v_{2,3}$  élek függetlenek, tehát  $\nu(G) \geq 4$ . Ugyanakkor 5 független él már nem lehet, hiszen csak 9 csúcs van. Tehát  $\nu(G) = 4$ . 3 pont

A Gallai tétel szerint  $\nu(G) + \rho(G) = 9$ , tehát  $\rho(G) = 5$ . 2 pont

Sajnos a König tételeket nem alkalmazhatjuk, mert  $G$  nem páros gráf. Határozzuk meg  $\alpha(G)$ -t. Tekintsünk egy független ponthalmazt. Nem lehet közülük kettő egy "oszlopban", vagyis az első indexeik mind különbözők. Tehát nem lehet több, mint 3 pont a halmazban,  $\alpha(G) \leq 3$ . Ugyanakkor a  $v_{1,1}$ ,  $v_{2,2}$ ,  $v_{3,3}$  csúcsok függetlenek, tehát  $\alpha(G) = 3$ . 3 pont

Végül másik Gallai alapján  $\alpha(G) + \tau(G) = 9$ , tehát  $\tau(G) = 6$ . 2 pont

2. A  $G$  egyszerű összefüggő gráfnak 10 csúcsa van, minden csúcs foka 3. Bizonyítsuk be, hogy  $\alpha(G) \geq 4$ .

Alkalmazhatjuk a Brooks tételt, hiszen  $G$  összefüggő, nem páratlan kör és nem is teljes gráf. Tehát  $\chi(G) \leq \Delta(G) = 3$ . 4 pont

Vegyük  $G$  egy 3-színezését, ebben a legnagyobb színosztály legalább 4 csúcsból áll. 4 pont

Viszont ezek a pontok függetlenek, tehát tényleg  $\alpha(G) \geq 4$ . 2 pont

3. A  $H$  gráfnak 2024 csúcsa van,  $\nu(G) = 100$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) \leq 201$ .

Legyen  $V$   $H$  csúcsainak a halmaza. A feltételek szerint  $G$ -ben van 100 független él,  $e_1, \dots, e_{100}$ . Ezek végpontjainak a halmaza legyen  $U$ . Ha  $V \setminus U$ -ban lenne él, akkor  $G$ -ben lenne 101 független él, ami lehetetlen. 4 pont

Ekkor viszont kiszínezhethetjük a  $V \setminus U$  halmaz pontjait ugyanazzal a színnel. 3 pont

$U$ -ban 200 csúcs van, ezeket színezzük csupa különböző színnel. Ez egy jó színezése  $G$ -nek 201 színnel, tehát  $\chi(G) \leq 201$ . 3 pont

4.  $G$  csúcsai  $v_1, \dots, v_{100}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  akkor és csak akkor szomszédosak, ha  $|i - j| = 1$  vagy 3. Határozzuk meg  $\chi'(G)$ -t,  $G$  élkromatikus számát.

Minden csúcs foka legfeljebb 4, hiszen  $v_i$  lehetséges szomszédai  $v_{i-3}$ ,  $v_{i-1}$ ,  $v_{i+1}$ ,  $v_{i+3}$ . Tehát  $\chi'(G) \geq 4$ . 5 pont

4 színnel viszont ki is lehet színezni az éleket: az 1 hosszú éleket felváltva 2 színnel, a 3 hosszú éleket meg felváltva másik két színnel. Pontosabban: a  $v_i v_j$ ,  $i < j$  él piros, ha  $j = i + 1$  és  $i$  páros, kék, ha  $j = i + 1$  és  $i$  páratlan, zöld, ha  $j = i + 3$  és  $i$  páros, sárga, ha  $j = i + 3$  és  $i$  páratlan. 5 pont

5.  $G$  csúcsai az 5 hosszú 0–1 sorozatoknak felelnek meg. (Vagyis olyan 5 hosszú sorozatoknak, amelyeknek minden eleme 0 vagy 1.) Két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha a két megfelelő sorozat pontosan egy helyen tér el egymástól. Bizonyítsuk be hogy  $G$  nem síkgráf.

*Első megoldás:*

Belátjuk, hogy  $G$ -ben van topologikus  $K_5$ , így Kuratowski tétele alapján nem lehet síkgráf. 4 pont

Minden  $i$ -re,  $1 \leq i \leq 5$  vegyük azt a  $0 - 1$  sorozatot, amelyben az  $i$ -edik helyen 1 van, a többi 0, a megfelelő csúcs legyen  $v_i$ . Es minden  $1 \leq i < j \leq 5$ -re vegyük azt a  $0 - 1$  sorozatot, amelyben az  $i$ -edik és  $j$ -edik helyen 1 van, a többi 0, a megfelelő csúcs legyen  $u_{i,j}$ . Ekkor a topologikus  $K_5$  fő csúcsai  $v_1, \dots, v_5$ . A  $v_i$  és  $v_j$  közti út pedig a  $v_i u_{i,j} v_j$ . 6 pont

*Második megoldás:*

Vegyük észre, hogy  $G$  páros gráf. Az egyik osztályba azok a csúcsok tartoznak, amelyek páros számú 1-est tartalmazó sorozatnak felelnek meg, a másikba meg azok, amelyek páratlan számú 1-est tartalmazó sorozatnak felelnek meg. Ha egy helyen megváltoztatjuk a sorozatot, az 1-esek számának a paritása megváltozik. 5 pont

A csúcsok száma  $n = 2^5$ , és minden csúcs foka 5, tehát az élek  $e$  számára  $2e = 5n$ ,  $e = 5n/2$ . 3 pont

Viszont egy páros síkgráfnak legfeljebb  $2n - 4$  éle lehet, ami kevesebb, mint  $5n/2$ , tehát  $G$  nem síkgráf. 2 pont

6.  $G$  egy 20 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet minden lapja (beleértve a végtelen tartományt is) hét oldalú.

Tegyük fel, hogy minden lap hét oldalú. Mivel  $G$  összefüggő és  $n = 20$ , az Euler Formula szerint  $20 - e + t = 2$ , vagyis  $18 = e - t$ . 3 pont

Mivel minden lap hét oldalú,  $7t = 2e$ , vagyis  $7t/2 = e$ . 4 pont

Behelyettesítve:  $18 = 7t/2 - t$  vagyis  $36 = 5t$ , ami nem stimmel, mert 36 nem osztható 5-tel. Ezzel beláttuk hogy nem lehet minden lap hét oldalú. 3 pont