

Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2024. május 17. 10.15-11.45, E 505.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G gráf csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{25} . v_i és v_j össze van kötve éllel akkor és csak akkor, ha ij osztható 3-mal, de 9-cel nem. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$ értékeket. Bizonyítsuk be, hogy $\rho(G)$ nem létezik.

A feltételekből következik, hogy ha i és j szomszédosak, akkor i és j közül pontosan egy osztható 3-mal, de 9-cel ő sem osztható. 1 pont

Mivel 9 és 18 osztható 9-cel, a v_9 és v_{18} csúcsok izolált csúcsok. A 3-mal osztható, de 9-cel nem osztható számok 1 és 25 között a következők: 3, 6, 12, 15, 21, 24. A többi szám 3-mal sem osztható. Ennek alapján a G gráf egy teljes páros gráf, az egyik osztály csúcsai $v_3, v_6, v_{12}, v_{15}, v_{21}, v_{24}$, a másik osztály a többi csúcs, kivéve v_9 és v_{18} , ezek izolált csúcsok. Vagyis G éppen egy $K_{6,17}$ teljes páros gráf plusz két izolált pont. 2 pont

Ebben $v_3, v_6, v_{12}, v_{15}, v_{21}, v_{24}$ egy lefogó ponthalmaz, tehát $\tau(G) \leq 6$. 2 pont

Hat független élt könnyű találni, pl $v_2v_3, v_5v_6, v_{11}v_{12}, v_{14}v_{15}, v_{20}v_{21}, v_{23}v_{24}$, tehát $\nu(G) \geq 6$. 2 pont

Mivel $\tau(G) \geq \nu(G)$, a fentiekből következik, hogy $\tau(G) = \nu(G) = 6$. 1 pont

A Gallai tétel alapján $\alpha(G) = 25 - \tau(G) = 19$. 1 pont

Ugyanakkor $\rho(G)$ nincs értelmezve, mert G -nek vannak izolált csúcsai. 1 pont

2. A H egyszerű gráfra $\alpha(H) = 4$, $\tau(H) = 6$, $\nu(H) = 4$ és H -nak nincs izolált pontja.

a. Határozzuk meg a $\rho(H)$ -t.

b. Adjunk meg egy H egyszerű gráfot, amelyre $\alpha(H) = 4$, $\tau(H) = 6$, $\nu(H) = 4$. (Mindegy, hogy van-e izolált pontja.)

a. A Gallai tétel alapján $n = \alpha(G) + \tau(G) = 4 + 6 = 10$. Vagyis 10 csúcsa van H -nak. A másik Gallai tétel alapján $10 = \nu(G) + \rho(G)$, tehát $\rho(G) = 10 - \nu(G) = 6$. 4 pont

b. Vegyük 2 darab háromszög és 2 darab él diszjunkt unióját. 3 pont

Ebben minden összefüggő komponensben csak egy független pont van, tehát $\alpha(G) = 2 + 2 = 4$. 1 pont

Lefogó pontrendszerhez a háromszögekből 2 – 2 pontot kell választani, az élekhez 1 – 1 pontot, tehát $\tau = 4 + 2 = 6$. 1 pont

Végül független élből minden komponensben csak egyet vehetünk, tehát $\nu(H) = 4$. 1 pont

3. A G 101 csúcsú 2-pontösszefüggő egyszerű gráfban minden csúcs foka 4, egy csúcs kivételével, amelynek 100 a foka. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 4$.

Legyen v a 100 fokú csúcs. Mivel G -nek 101 csúcsa van, v minden más csúccsal össze van kötve. 1 pont

Hagyjuk el G -ből v -t, legyen a kapott gráf G' . G' -nek tehát 100 csúcsa van, és minden pont foka 3. 3 pont

Mivel G 2-pontösszefüggő volt, G' is összefüggő, nem páratlan kör, és nem is teljes gráf. Tehát alkalmazhatjuk a Brooks tételt, ennek alapján $\chi(G') \leq \Delta(G') = 3$. 3 pont

Viszont $\chi(G) \leq \chi(G') + 1$, hiszen G' színezését kiterjeszthetjük G színezésévé úgy, hogy az elhagyott 100 fokú csúcsnak egy új színt adunk. Tehát $\chi(G) \leq 4$. 3 pont

4. A H gráf csúcsai az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i, j \leq 5$. Két különböző csúcs, (i, j) és (k, l) össze van kötve éllel akkor és csak akkor, ha $i = k$ vagy $j = l$. Határozzuk meg H élkromatikus számát, $\chi'(H)$ -t.

A H gráfnak 25 csúcsa van. 1 pont

Legyen (i, j) egy tetszőleges csúcs. Ennek 4 olyan (k, l) szomszédja van, ahol $i = k$ és 4 olyan, ahol $j = l$. Tehát minden csúcs foka 8. 3 pont

A Vizing tétel alapján tehát $8 \leq \chi'(H) \leq 9$. 2 pont

Ha ki tudnánk színezni 8 színnel az éleket, akkor minden csúcshoz csatlakozna él mind a 8 színből. Vagyis az azonos színű élek teljes párosítást alkotnának. De ez lehetetlen, hiszen páratlan sok csúcsunk van. 3 pont

Tehát $\chi'(H) = 9$. 1 pont

5. G csúcsai a 6 hosszú $0-1$ sorozatoknak felelnek meg. (Vagyis olyan 6 hosszú sorozatoknak, amelyeknek minden eleme 0 vagy 1.) Két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha a két megfelelő sorozat pontosan egy helyen tér el egymástól. Bizonyítsuk be hogy G nem síkgráf.

Első megoldás:

A G gráfnak $n = 2^6$ csúcsa van, hiszen ennyi 6 hosszú $0-1$ sorozat van. 1 pont

Minden 6 hosszú $0-1$ sorozathoz pontosan 6 másik 6 hosszú $0-1$ sorozat van, amely pontosan egy helyen tér el tőle. 3 pont

Tehát az élek e számára: $2e = \sum_{i=1}^n d_i = 6n$, vagyis $e = 3n$. 3 pont

De egy n csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle van, ellentmondás, vagyis G nem lehet síkgráf. 3 pont

Második megoldás:

Minden 6 hosszú $0-1$ sorozathoz pontosan 6 másik 6 hosszú $0-1$ sorozat van, amely pontosan egy helyen tér el tőle. 3 pont

Tehát minden csúcs foka 6 és G nyilván egyszerű gráf. 2 pont

Viszont tanultuk, hogy minden egyszerű síkgráfban van legfeljebb 5-ödfokú csúcs, ami itt nem teljesül. Tehát G nem síkgráf. 5 pont

6. A G összefüggő síkbarajzolt gráfnak 10 darab 3 oldalú lapja van, 10 darab 4 oldalú, és egy 10 oldalú. Más lapja nincs. Hány csúcsa van G -nek?

Legyen n , e , t a csúcsok, élek, lapok száma. Mivel G összefüggő, az Euler formula szerint $n - e + t = 2$. 2 pont

A lapok száma, $t = 10 + 10 + 1 = 21$. 3 pont

Az élek számára $2e = \sum_{i=1}^{21} |T_i| = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 10 = 80$ vagyis $e = 40$. 3 pont

Végül az Euler formula alapján $n = 2 + e - t = 21$. 2 pont