Kombinatorika és gráfelmélet I

1/2. PótZH, 2024. május 24. 10.15-11.45

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A 200 csúcsú G teljes gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 100$. A $v_{i,j}v_{k,l}$ él súlya legyen 1, ha $i = k$ és legyen 2, ha $i \neq k$. Hány különböző minimális összsúlyú feszítőfája van G-nek?

Bontsuk G csúcshalmazát két osztályra, legyen $i = 1, 2$-re $V_i = \{ v_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 100 \}$. A G gráfban a két különböző osztály között futó élek súlya 2, a valamelyik osztályon belül futó élek súlya 1. 2 pont

A mohó algoritmus lehetséges futásait követve láthatjuk, hogy a minimális feszítőfák a következő módon néznek ki: veszünk egy-egy tetszőleges feszítőfát a V_1, V_2 osztályokban, majd egy 2 súlyú éllel összekötjük őket. 3 pont

A Cayley tétel alapján mindkét V_i-ben 100^{98} különböző feszítőfa van. 2 pont

Az osztályokat pedig 100^2-féleképpen köthetjük össze. 2 pont

Tehát a válasz $100^2 \cdot 100^{98} \cdot 100^{98} = 100^{198}$. 1 pont

2. Maximálisan hány éle lehet egy 12 csúcsú egyszerű gráfnak, amelyben van Euler séta, de nincs Euler körséta?

Euler körséta akkor és csak akkor van, ha a gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden pont foka páros. Euler séta pedig akkor és csak akkor van, ha a gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő és legfeljebb két pont kivételével minden pont foka páros. 3 pont

Ennek alapján a gráfunk izolált pontoktól eltekintve összefüggő és pontosan két pont kivételével minden pont foka páros. Ez azt jelenti, hogy két csúcs maximális fokszáma 11 (hiszen a gráf egyszerű) a többi csúcs maximális fokszáma 10. Tehát $2e = \sum_{i=1}^{12} d_i \leq 2 \cdot 11 + 10^2 = 122$ vagyis $e \leq 61$. 4 pont

Ennyi él viszont lehet is: vegyünk el egy teljes 12 csúcsú gráfból 5 független élt. Itt két csúcs foka 11, a többié 10 és nyilván összefüggő. 3 pont

3. A G $n \geq 5$ csúcsú egyszerű gráfban bármely három csúcs fokszámának az összege legalább $2n$. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton kör.

Legyenek a csúcsok $v_1, \ldots, v_n$, a fokszámaik $d_1, \ldots, d_n$. Legyen v_i és v_j két tetszőleges csúcs. Azt állítjuk, hogy $d_i + d_j \geq n + 1$. 3 pont

Legyen v_k egy harmadik csúcs. Mivel G egyszerű gráf, $d_k \leq n - 1$. A feltételek alapján $d_i + d_j + d_k \geq 2n$, tehát $d_i + d + j \geq 2n - d_k \geq 2n - (n - 1) = n + 1 > n$ 4 pont

Ekkor viszont alkalmazhatjuk az Ore tételt, ennek alapján G tartalmaz Hamilton kört. 3 pont

4. A (G, s, t, c) hálózatban minden e élre $c(e) > 0$, *nem feltétlenül egész.* A maximális folyam nagysága $M = 3$. Legyen M' a $(G, s, t, c+1)$ (minden él kapacitását megnöveljük 1-gyel) hálózatban a maximális folyam nagysága. Határozzuk meg M' lehetséges értékeit.

Ha egy vágás k élből áll, és minden kapacitáshoz hozzáadunk 1-et, akkor a vágás kapacitása k-val nő. 1 pont

Mivel a (G, s, t, c) hálózatban minden vágás kapacitása legalább 3, a $(G, s, t, c+1)$ hálózatban minden vágás kapacitása legalább 4, tehát $M' \geq 4$. 3 pont

Most legyen $X \geq 4$ tetszőleges valós szám. Legyen $Y > X$ egész. Vegyük a következő (G, s, t, c) hálózatot. s-ből v-be mutat $Y - 3$ darab párhuzamos él, mindegyiknek a kapacitása $3/(Y-3)$, és v-ből t-be mutat egy él, aminek a kapacitása $X - 1$. 2 pont

Ekkor (G, s, t, c)-ben két vágas van, kapacitásuk $3(Y-3)/(Y-3) = 3$ és $X - 1 \geq 3$, tehát $M = 3$. 2 pont

$(G, s, t, c+1)$-ben is két vágas van, kapacitásuk $(Y-3)(3/(Y-3)+1) = Y$ és X, viszont $Y > X$, tehát $M' = X$. Vagyis M' lehetséges értékei: minden $X \geq 4$ valós szám. 2 pont

5. G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$. v_i és v_j össze van kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 2$ vagy 3. Határozzuk meg G pontösszefüggőségi számát, $\kappa(G)$-t.

Mivel v_1 foka 2, $\kappa(G) \leq 2$. 4 pont

Most hagyjunk el egy csúcsot G-ből, v_i-t. Ha $5 \leq i \leq 96$, akkor könnyen látható, hogy a v_j, $j < i$ illetve a v_j, $j > i$ csúcsok összefüggő gráfot feszítenek, és (például) a $v_{i-1}v_{i+1}$ él összeköti őket, tehát $G \setminus v_i$ összefüggő. 3 pont

A többi esetet külön megnézzük. Ha $i = 1$, akkor is, a v_j, $j > 1$ csúcsok összefüggő gráfot feszítenek és ez éppen a $G \setminus v_1$ gráf. Ha $i = 2$, akkor a v_j, $j > 2$ csúcsok összefüggő gráfot feszítenek és a v_1v_3 él miatt az egész $G \setminus v_2$ gráf is összefüggő. Ha $i = 3$, akkor meg a v_j, $j > 3$ csúcsok összefüggő gráfot feszítenek és a v_1v_4 és v_2v_4 élek miatt az egész $G \setminus v_2$ gráf is összefüggő. Ha pedig $i = 97, 98, 99$, akkor a szimmetria miatt ugyanezek az ervelesek működnek. 2 pont

Tehát egy pont elhagyása után G összefüggő marad, $\kappa(G) = 2$. 1 pont

6. G-nek ismét 100 csúcsa van és egyszerű gráf, minden csúcs fokszáma nagyobb, mint 6. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) > 3$.
($\nu(G)$ G független éleinek maximális száma.)

Tegyük fel, hogy $\nu(G) = \nu \leq 3$. Legyen $e_1, \ldots e_\nu$ egy maximális független élhalmaz. Ezeknek az éleknek összesen $2\nu \leq 6$ végpontja van. Legyen ezen pontok halmaza V. 5 pont

Most legyen v egy V-n kívüli csúcs. Mivel $d(v) > 6$, v-nek van V-n kívüli szomszédja. De ez ellentmondás, hiszen ebben az esetben lenne egy él, ami független $e_1, \ldots e_\nu$-től, ami ellentmond $e_1, \ldots e_\nu$ választásának. 4 pont

Tehát ellentmondásra jutottunk abból, hogy $\nu \leq 3$, vagyis $\nu > 3$. 1 pont