Kombinatorika és gráfelmélet I

1/1. PótZH, 2024. május 3. 10.15-11.45

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány 8 levelű fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsokon?

A fát egyértelműen meghatározza a Prüfer kódja, ami ebben az esetben 8 hosszú. A Prüfer kódban minden v_i csúcs sorszáma $d_i - 1$-szer szerepel. Vagyis a levelek sorszámai nem szerepelnek, a többi sorszám igen. 2 pont

Tehát az olyan Prüfer kódokat keressük, amelyben pontosan két szám szerepel. 2 pont

Ehhez először ki kell választani a két szereplő számot, ez $\binom{10}{2} = 45$ lehetőség. 2 pont

Mind a 8 helyre a két szám bármelyikét írhatjuk, kivéve azt a lehetőséget, amikor mind a 8 helyre ugyanazt írjuk. Ez $2^8 - 2 = 254$ lehetőség. 3 pont

Tehát a keresett fák száma $45 \cdot 254$. 1 pont

2. A 6 csúcsú G gráf két diszjunkt háromszög uniója. Minimálisan hány élt kell hozzáadni G-hez, hogy a kapott *egyszerű* gráfban legyen Euler körséta?

Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler körséta, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fok páros. A gráfban jelenleg minden pont foka 2, ami páros, viszont nem összefüggő. 2 pont

Tehát össze kell kötni a két komponenst úgy, hogy minden fok maradjon páros. 2 pont

A hozzáadott élek tehát egy páros gráfot alkotnak, hiszen a két háromszög között futnak, és minden fok páros, ami itt csak 0 vagy 2 lehet. 3 pont

Ezért a hozzáadott élek egy kört alkotnak, ami legalább 4 hosszú. Vagyis legkevesebb 4 élt kell hozzáadni G-hez. Egy 4 hosszú kör hozzáadásával pedig valóban lesz Euler körséta, tehát a válasz 4. 3 pont

3. A G n csúcsú teljes gráf minden e élén van egy $s(e) > 0$ súly. Tudjuk, hogy G minden feszítőfájának az összsúlya egyforma. Bizonyítsuk be, hogy minden él $s(e)$ súlya is egyforma.

Tegyük fel, hogy van két él, e és f, amelyeknek különböző a súlya. 3 pont

Legyen H egy Hamilton kör, amely tartalmazza e-t is, és f-et is. 4 pont

Ekkor A $H - e$ és $H - f$ is Hamilton utak, vagyis feszítőfák, de különböző a súlyuk, ami ellentmondás. Tehát bármely két él súlya egyforma. 3 pont

4. A (G, s, t, c) hálózatban minden e élre $c(e) > 0$, *nem feltétlenül egész.* A maximális folyam nagysága $M = 3$. Legyen M' a $(G, s, t, c+1)$ (minden él kapacitását megnöveljük 1-gyel) hálózatban a maximális folyam nagysága. Döntsük el, hogy lehet-e M' értéke $11/2$.

Igen, lehet! Legyen a hálózatnak 3 csúcsa, s, t és v. Legyen három párhuzamos sv él, amelyeknek a kapacitása 1, és egy vt él, amelynek a kapacitása 4.5. 6 pont

Ekkor (G, s, t, c)-ben a minimális vágás (az sv élek), egyben a maximális folyam 3. 2 pont

$(G, s, t, c + 1)$-ben viszont a minimális vágás (a vt él), egyben a maximális folyam is 5.5. 2 pont

5. Határozzuk meg, hogy maximálisan hány éle lehet egy 6 csúcsú G egyszerű gráfnak, ha pontösszefüggőségi száma $\kappa(G) = 2$.

A gráfunknak van két csúcsa, a és b, amelyeket elhagyva G szétesik két komponensre. 3 pont

Mivel maximalizálni akarjuk az élek számát, be kell vennünk az összes élt a komponenseken belül, és az összes a-ra és b-re illeszkedő élt. 3 pont

Két lehetőség van a komponensek méretére. a) 1 és 3 csúcs, ekkor G-nek $9 + 3 = 12$ éle van, b) 2 és 2 csúcs, ekkor G-nek $9 + 2 = 11$ éle van. 3 pont

Tehát az élek maximális száma 12. 1 pont

6. Határozzuk meg $\nu(F)$ maximumát és minimumát, ha F tetszőleges 55 csúcsú fa lehet. ($\nu(F)$ az F gráfban a független élek maximális száma.)

Mivel F-nek 55 csésa van, nem lehet $\lfloor 55/2 \rfloor = 27$-nél több független éle. Ennyi viszont lehet is, ha F egy 55 csúcsú út. 5 pont

Minimum: Nyilván $\nu \geq 1$. És lehet is 1, ha F egy csillag. 5 pont