Kombinatorika és gráfelmélet I

1. Pótpót ZH, 2024. május 29, 8.15-9.45, IE 217-1.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió, ventillátor, mikrohullámú sütő, porszívó, fűnyíró használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. A 30 csúcsú G teljes gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 10$. A $v_{i,j}v_{k,l}$ él súlya legyen 1, ha $i = k$ és legyen 2 ha $i \neq k$. Hány különböző minimális összsúlyú feszítőfája van G-nek?

2. Minimálisan hány éle van egy 100 csúcsú G egyszerű gráfnak, amelyben van Hamilton kör de nincs Euler séta?

3. Legyen $|V| = 100$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ két fa a V csúcshalmazon, és $G(V, E_1 \cup E_2)$ az uniójuk. Bizonyítsuk be, hogy $\kappa(G) \leq 10$.

4. A (G, s, t, c) hálózatban minden e élre $c(e) > 0$ *nem feltétlenül egész.* A maximális folyam nagysága $M = 3$. A $(G, s, t, c + 1)$ (minden él kapacitását megnöveljük 1-gyel) hálózatban a maximális folyam nagysága $M' = 100$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan e él a (G, s, t, c) hálózatban amelynek a kapacitása $c(e) < 1/10$.

5. Szokás szerint G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 2$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ különböző csúcsok össze vannak kötve, ha
vagy $i = k$,
vagy $|i - k| = 1$ és $j = l$,
vagy $|i - k| = 4$ és $j = l$.
Határozzuk meg élösszefüggőségi számát $\lambda(G)$-t.

6. $G(A, B, E)$ egy 100 csúcsú egyszerű páros gráf, a két osztály A és B. Minden csúcs foka 3, 4, vagy 5. Bizonyítsuk be, hogy $|A| \geq 34$.

Kombinatorika és gráfelmélet I

2. Pótpót ZH, 2024. május 29, 8.15-9.45, IE 217-1.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió, ventillátor, mikrohullámú sütő, porszívó, fűnyíró használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

1. G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \le i \le 5$, $1 \le j \le 2$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ különböző csúcsok össze vannak kötve, ha
vagy $i = k$,
vagy $|i-k| = 1$,
vagy $|i-k| = 4$.
Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\rho(G)$ értékeket.

2. G egyszerű gráf, 9 csúcsa van és minden csúcs foka 4. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \ge 3$.

3. G egyszerű gráf, 2024 csúcsa van, nincs izolált csúcsa, és $\rho(G) = 1956$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \le 137$.

4. G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \le i \le 5$, $1 \le j \le 3$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ különböző csúcsok össze vannak kötve, ha
vagy $i = k$,
vagy $|i-k| = 1$,
vagy $|i-k| = 4$.
(Vigyázat ez a gráf nem azonos az 1. feladat gráfjával!) Határozzuk meg $\chi'(G)$-t.

5. G csúcsai a 4 hosszú $0-1$ sorozatoknak felelnek meg. (Vagyis olyan 4 hosszú sorozatoknak, amelyeknek minden eleme 0 vagy 1.) Két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha a két megfelelő sorozat pontosan egy helyen tér el egymástól. Bizonyítsuk be hogy G nem síkgráf.

6. A G összefüggő síkbarajzolt gráf minden lapjának 5 vagy 8 oldala van. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet pontosan 21 csúcsa.