Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2024. március 8.

Euler-kör, Euler-út, Hamilton-kör, Hamilton-út

Tudnivalók:

Euler kör (Euler körséta): olyan körséta, amely minden élt pontosan egyszer tartalmaz. Euler út (Euler séta): olyan séta, amely minden élt pontosan egyszer tartalmaz.

G-ben van Euler kör $\Leftrightarrow$ G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros.

G-ben van Euler út $\Leftrightarrow$ G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros, kivéve legfeljebb kettőt.

Hamilton kör: olyan kör, ami minden csúcsot tartalmaz.

Hamilton út: olyan út, ami minden csúcsot tartalmaz.

G-ben van Hamilton kör $\Rightarrow$ akárhogyan elhagyunk G-ből k csúcsot, legfeljebb k összefüggő komponensre esik szét.

G-ben van Hamilton út $\Rightarrow$ akárhogyan elhagyunk G-ből k csúcsot, legfeljebb $k+1$ összefüggő komponensre esik szét.

Dirac tétel: Ha minden $d_i \geq n/2 \Rightarrow G$-ben van Hamilton kör.

Ore tétel: Ha tetszőleges nem szomszédos x, y csúcsokra $d(x) + d(y) \geq n \Rightarrow G$-ben van Hamilton kör.

Pósa tétel: Legyen $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és minden $k < n/2$-re $d_k \geq k+1 \Rightarrow G$-ben van Hamilton kör.

Chvátal tétel: Legyen $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és minden $k < n/2$-re $d_k \geq k+1$, vagy $d_{n-k} \geq n-k \Rightarrow G$-ben van Hamilton kör.

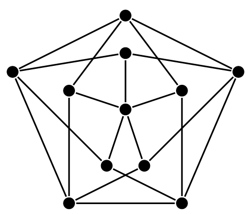
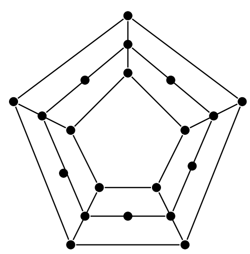
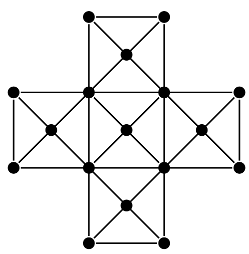
Dirac feltétel $\Rightarrow$ Ore feltétel $\Rightarrow$ Pósa feltétel $\Rightarrow$ Chvátal feltétel. Tehát a Dirac, Ore, Pósa, Chvátal tételek, ebben a sorrendben, egyre erősebbek.

Chvátal tétel a lehető legerősebb tétel, kizárólag a fokszámok alapján. Pontosabban: ha $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ megsérti a Chvátal feltételt, akkor van olyan G gráf, amelyben nincs Hamilton kör és a $d'_1 \leq d'_2 \leq \cdots \leq d'_n$ fokszám sorozatára, minden i-re $d'_i \geq d_i$.

1. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal kiparkettáztunk. Minden kis téglalapnak legalább az egyik oldala egész hosszúságú. Igazoljuk, hogy a nagy téglalapnak is van egész hosszúságú oldala. (*)
2. Igazoljuk, hogy ha a G gráf minden fokszáma páros, akkor $E(G)$ előáll éldiszjunkt körök uniójaként.
3. Igazoljuk, hogy ha G összefüggő és minden fokszáma páros, akkor G-ből elhagyhatók G egy körének élei úgy, hogy a kapott gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő maradjon.
4. Bizonyítsuk be, hogy egy *irányított* gráfnak (amelynek nincs izolált pontja) akkor és csak akkor van irányított Euler köre, ha minden pont be–foka egyenlő a ki–fokával, és gráf, mint irányítatlan gráf, összefüggő.
5. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler köre?
6. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmazából páros sok él indul a komplementerébe.
7. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler kört, illetve Euler utat?
8. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G élgráfjának, $L(G)$-nek is van Euler köre!

   (A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk.)
9. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
10. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.

11. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G-ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G-ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?
12. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)
13. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
    (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (c) Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
    (d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.
14. (a) Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8-as), (c) 3×5-ös, (d) 3×6-os sakktábla esetén?
15. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
16. (a) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfból bárhogy elhagyunk k csúcsot, legfeljebb k komponensre esik szét! (b) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfnak nincs Hamilton köre!
17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.
18. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.
19. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.
20. A G egyszerű gráfnak $2n+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!
21. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Hamilton-köre?
22. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?
23. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.
24. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
    (a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
    (b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;
    (c) G_n a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfot jelöli és $n \geq 2$.
25. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?

26. Legalább hány éle van egy olyan hat (n) pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
27. Legfeljebb hány éle lehet egy hat (n) csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?
28. Legyen G egy n csúcsú gráf. Ha találunk két nem szomszédos u, v csúcsot, amelyekre $d(u) + d(v) \geq n$, akkor húzzuk be az uv élet. Ismételjük az eljárást, amíg el nem akadunk.

    Előfordulhat, hogy ezt az eljárást többféleképpen is végrehajthatjuk, mert egy lépésben több lehetséges él közül is választhatunk. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is hajtjuk végre az eljárást, az eredményként kapott gráf mindig ugyanaz. (Ezt nevezzük G lezártjának.)
29. a. Mutassunk olyan gráfot, amelyre nem teljesül a Chvátal feltétel, de mégis van Hamilton köre.

    b. Mutassunk olyan számsorozatot, amelyre teljesül a Chvátal feltétel, de nincs olyan gráf, amelynek a fokszámsorozata.

Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris feszítő részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig 1-reguláris feszítő részgráfja?

   (Egy gráfot *k-regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k. Egy részgráfot *feszítő részgráfnak* nevezünk, ha az eredeti gráf összes pontját tartalmazza.)

2. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.