

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

12. gyakorlat, 2024. május 24.

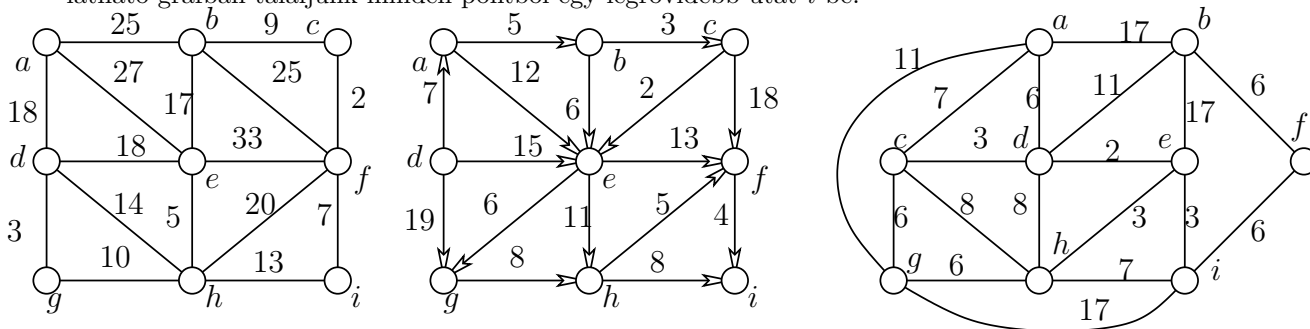
*Legrövidebb utak, BFS, Dijkstra*

**Def:** Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfüggvény. Az  $uv \in E$  él hossza alatt az  $l(uv)$ -t értjük. A  $G$  egy  $P$  útjának a *hossza* a  $P$  éleinek összhossza. Az  $u, v \in V$  pontok *távolságát*  $dist_l(u, v)$  jelöli, melyre  $dist_l(u, v) = \ell$ , ha létezik  $\ell$  hosszúságú  $uv$  út  $G$ -ben, de  $\ell$ -nél rövidebb nincs. (Ha nincs  $uv$ -út  $G$ -ben, akkor  $dist_l(u, v) = \infty$ . Ha nem adjuk meg az  $l$  távolságfüggvényt, akkor az  $l \equiv 1$  függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

- Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf,  $G$  élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvény. Tegyük fel, hogy egy  $u$ -ból  $v$ -be vezető élsorozat éleinek összhossza  $\ell$ . Igazoljuk, hogy  $dist_l(u, v) \leq \ell$ .
- Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf,  $G$  élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvény, valamint egy  $r \in V$  gyökérpont. Tegyük fel, hogy  $d(r) = 0$ , továbbá  $d(v) \geq dist_l(r, v)$  teljesül minden  $r \neq v \in V$  esetén. Ha valamely  $uv \in E$  esetén  $d(v) > d(u) + l(u, v)$ , akkor végrehajtható az  $uv$  *élmenti javítás*, amikor is  $d(v)$  értékét  $d(u) + l(u, v)$ -re csökkentjük.

- Igazoljuk, hogy a fenti élmenti javítás után kapott  $d$  függvényre  $d(v) \geq dist_l(r, v)$  teljesül.
- Mutassuk meg, hogy ha  $d(v) = dist_l(r, v)$  teljesül minden  $v \in V$  pontra, akkor nem végezhető élmenti javítás.
- Bizonyítsuk be, hogy ha nem végezhető élmenti javítás, akkor  $d(v) = dist_l(r, v)$  teljesül minden  $v \in V$  csúcsra.
- Igazak-e a fentiek akkor, ha a távolságfüggvény negatív értékeket is felvehet? Miért?
- Mi a helyzet akkor, ha a  $dist_l(u, v)$  definíciójában legrövidebb út helyett legrövidebb élsorozattal dolgozunk?

- Hogyan lehet zsineggel, vonalzóval és csavaralátétekkel nemnegatív élhosszok mellett irányítatlan gráfban legrövidebb utat meghatározni?
- Törpfallván járvány ütötte fel a fejét az követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfallván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?
- Tervezzünk hatékony algoritmust, amelynek inputja egy (szomszédossági mátrixával megadott)  $G = (V, E)$  (irányított) gráf és egy  $k$  szám, outputja pedig minden  $u, v \in$  csúcspárra megadja, hogy  $G$ -ben hány különböző  $u$ -ból  $v$ -be vezető  $k$  élből álló élsorozat található. (Pl.  $k = 1$  esetén az inputként megadott szomszédossági mátrix outputnak is kiváló.)
- Legyenek  $l_1, l_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvények a  $G = (V, E)$  gráfon. Igaz-e, hogy ilyenkor  $dist_{l_1}(u, v) + dist_{l_2}(u, v) = dist_{l_1+l_2}(u, v)$  mindig teljesül minden  $u, v \in V$ -re?
- Az alábbi bal oldali ábrán látható gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden  $e$ -től különböző  $v$  csúcsra egy legrövidebb  $ev$  utat. A középső ábrán látható gráfban találjunk minden pontból egy legrövidebb utat  $i$ -be.



8. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A fenti jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellet, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült ösztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (Az utcák által határolt beépített területek felett repülési tilalom van érvényben.)
9. Mutassunk példát olyan irányított  $D = (V, E)$  gráfra, az éleken egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvényre, hogy alkalmas  $s \in V$  pontból indítva a Dijkstra algoritmust, helytelen eredményt kapunk.
10. Adott  $G = (V, E)$  gráf és  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  nemnegatív élhosszfüggvény esetén legyen  $f(v) := \max\{dist_l(v, u) : u \in V\}$ . Határozzuk meg, a  $\max\{\frac{f(v)}{f(u)} : u, v \in V(G)\}$  érték maximumát, ha  $G$  tetszőleges véges, irányítatlan gráf lehet.