Kombinatorika és gráfelmélet 1.

10. gyakorlat, 2024. május 3.

Kromatikus szám, élszínezés

$\chi(G)$: G kromatikus száma, G csúcsainak a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két összekötött pont különböző színű.)

$\Delta(G)$: maximális fokszám G-ben. $\omega(G)$: G klikkszáma, a legnagyobb teljes részgráf mérete.

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Brooks tétel: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

gyenge Brooks tétel: Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Minden pozitív egész k ra létezik olyan G_k gráf, melyre $\omega(G_k) = 2$, és $\chi(G_k) = k$.

Zykov konstrukció: Legyen Z_2 a teljes két csúcsú gráf. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a Z_k gráfot. Legyen Z_{k+1} a következő gráf. Vegyük Z_k k darab diszjunkt példányát. Ezek után minden lehetséges módon válasszunk ki egy-egy csúcsot mindegyik példányból, vegyünk fel ehhez a k-ashoz egy új csúcsot, es kössük össze a k-as elemeivel. Ekkor minden k-ra $\omega(Z_k) = 2$ és $\chi(Z_k) = k$.

Shift gráf: Legyen $m > 1$ rögzített. Legyenek S_m csúcsai az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i < j \leq m$. Két csúcs, (i, j) és (a, b) össze van kötve G-ben akkor és csak akkor, ha $j = a$ vagy $i = b$. Ekkor minden m-re $\omega(S_m) = 2$ és $\chi(S_m) \geq \log_2 m$.

$L(G)$: G élgráfja, csúcsai G éleinek felelnek meg, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő éleknek G-ben van közös végpontja.

$\chi'(G) = \chi_e(G)$: G élkromatikus száma, G éleinek a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két közös végpontú él különböző színű.) Nyilván $\chi'(G) = \chi_e(G) = \chi(L(G))$.

Minden G gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

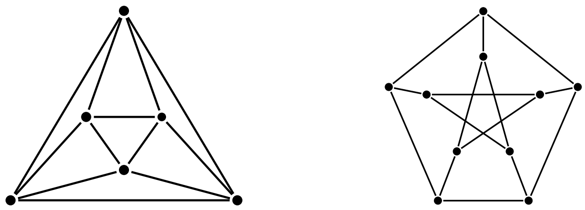
Vizing tétel: Minden G egyszerű gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig tétel: Ha G páros gráf, akkor $\Delta(G) = \chi'(G)$.

1. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
2. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
3. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
4. Mutassunk olyan 6 csúcsú G gráfot, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel.
5. Mutassuk meg, hogy minden G gráfra, ha a mohó színezést megfelelő csúcs-sorrendben végezzük, akkor optimális színezést ad, azaz $\chi(G)$ színnel színezi ki G-t.
6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésében bármely színosztálynak van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.
8. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül.
   Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)
9. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.
10. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.

11. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
12. (*) Tegyük fel, hogy az n csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, azaz bármely két 3-színezésében ugyanazok a színosztályok. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább $2n - 3$ éle van.
13. Legyenek a G (végtelen) gráf csúcsai a sík pontjai, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha egységtávolságot határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy $4 \leq \chi(G) \leq 7$.

    $\chi(G)$ meghatározása a híres Hadwiger-Nelson probléma, $\chi(G)$-t szokás a sík kromatikus számának is hívni. A legjobb ismert korlátok: $5 \leq \chi(G) \leq 7$.
14. Határozzuk meg az olyan n csúcsú G gráfok élszámának a maximumát, amelyekre $\chi(G) \leq 3$.
15. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű összefüggő gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.
16. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
17. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.
18. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.
19. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfjának a komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
20. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r-reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.
2. Mutassunk minden $D \geq 1$ számhoz olyan G gráfot, amelyre $\Delta(G) = D$ és $\chi'(G) = D$.