Kombinatorika és gráfelmélet I

2. ZH, 2023. május 26. 8.15-9.45, T 601/2.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám.

1. G egy 2023 csúcsú síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) < 1600$.

A Négyszítétel szerint G kromatikus száma legfeljebb 4. 3 pont

Színezzük ki G csúcsait 4 színnel. A legnagyobb színosztály, mondjuk a piros mérete legalább $\lceil 2023/4 \rceil = 506$. 2 pont

A piros pontok között nem fut él, tegát a másik három színosztály pontjai együtt egy lefogó ponthalmazt alkotnak. 3 pont

Mivel legalább 506 piros pont van, a másik három színosztály együtt legfeljebb 1517 pontból áll, tehát $\tau(G) < 1600$. 2 pont

2. G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \le i, j \le 3$. (Tehát G-nek 9 csúcsa van.) A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ csúcsok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha $|i-k| + |j-l| = 1$. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.

Ha a $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ csúcsok össze vannak kötve, akkor $|(i+j) - (k+l)| = 1$. Tehát a G gráf páros, az egyik osztály az, ahol $i+j$ páros, a másik az, ahol $i+j$ páratlan. Ezért nem csak a Gallai, hanem a Kőnig tételeket is használhatjuk. 3 pont

Határozzuk meg $\nu(G)$-t. Mivel 9 csúcs van, $\nu(G) \le \lfloor 9/2 \rfloor = 4$. Ugyanakkor könnyen található 12 független él, például $v_{1,1}v_{1,2}$, $v_{2,1}v_{2,2}$, $v_{3,1}v_{3,2}$, $v_{1,3}v_{2,3}$.

Tehát $\nu(G) = 4$. 1 pont

Kőnig tétel alapján akkor $\tau(G) = \nu(G) = 4$. 1 pont

A Gallai alapján $\alpha(G) = 25 - \tau(G) = 5$. 1 pont

Végül pedig a Gallai alapján $\rho(G) = 9 - \nu(G) = 5$. Vagy a Kőnig alapján $\rho(G) = \alpha(G) = 5$. 1 pont

3. A G 2023 csúcsú gráf 8-reguláris. Bizonyítsuk be hogy $\chi'(G) = 9$.

A Vizing tétel szerint $8 \le \chi'(G) \le 9$. 2 pont

Tegyük fel, hogy 8 színnel sikerült kiszínezni az éleket. Ekkor, mivel minden csúcs foka 8, minden színű élből minden csúcsra illeszkedik. 2 pont

Tehát az azonos színű élek egy teljes párosítást alkotnak. 2 pont

De ez lehetetlen, mert páratlan sok csúcsunk van. 2 pont

Tehát minden ilyen G gráfra $\chi'(G) = 9$. 2 pont

4. Határozzuk meg az összes olyan egyszerű síkbarajzolt gráfot, amelyre $e \le t$.

Az Euler formula szerint $n - e + t = k + 1$. Mivel $e \le t$, $n \le n - e + t = k + 1$, tehát $n - 1 \le k$. 3 pont

Viszont $k \le n$ minden gráfra, tehát a gráfunknak $n-1$ vagy n komponense van. 3 pont

Ha $k = n$, akkor a gráf n darab izolált pontból áll, $e = 0$, $t = 1$. 2 pont

Ha $k = n - 1$, akkor a gráfnak pontosan egy éle van, $e = 1$, $t = 1$. Más lehetőség nincs. 2 pont

5. G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$. v_i és v_j össze van kötve, ha $|i - j| = 1, 2$, vagy 12. Határozzuk meg $\chi(G)$-t.

A v_1, v_2, v_3 csúcsok egy háromszöget alkotnak, tehát $\chi(G) \geq 3$. 3 pont

Próbáljuk meg kiszínezni G-t 3 színnel. Világos, hogy v_1, v_2, v_3 különböző színűek, mondjuk 1, 2 és 3. Ekkor v_4 csak 1 színű lehet v_2 és v_3 miatt, v_5 2 színű, és így tovább. Tehát az egyetlen lehetséges 3-színezés a periodikus 3 színezés. 2 pont

De ez a színezés nem jó, mert pl v_1 és v_{13} egyforma színűek, és szomszédosak! Tehát $\chi(G) \geq 4$. 3 pont

4 színnel pedig kiszínezhető a gráf. A "sima" 4-periodikus színezés nem jó, megint a 12 távolságra levő csúcsok miatt, de a következő 7-periodikus színezés jó:

1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, ...

Vagy: ha növekvő sorrendben színezünk, akkor az aktuális csúcsnak mindig csak 3 kiszínezett szomszédja lesz, tehát 4 szín esetén nem akadunk el. 4 pont

6. G-nek az a vicces tulajdonsága van, hogy bárhogy elhagyunk belőle 2 élt, a kapott G' gráf kiszínezhető 100 színnel. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 101$, vagy 6 pontért azt, hogy $\chi(G) \leq 102$.

Ha minden csúcs foka legfeljebb 1, akkor a mohó színezéssel ki tudjuk színezni 2 színnel. 2 pont

Tegyük tehát fel, hogy van egy v csúcs, aminek a foka legalább 2. Hagyjunk el két v-re illeszkedő élt, mondjuk uv-t és wv-t. 4 pont

Az így kapott G' gráf a feltételek szerint kiszínezhető 100 színnel. 1 pont

Tegyük vissza az uv és wv éleket. Két probléma lehet: u és v egyszínűek, vagy w és v egyszínűek. Adjunk tehát v-nek egy teljesen új színt. Ez egy jó 101-színezése lesz G-nek. 3 pont

VAGY:

Ha G-ben legfeljebb 1 él van, akkor nyilván $\chi(G) \leq 2$. 1 pont

Legyen uv és st G két éle. Hagyjuk el őket G-ből. Az így kapott G' gráf a feltételek szerint kiszínezhető 100 színnel. 2 pont

Tegyük vissza az uv és st éleket. Két probléma lehet: u és v egyszínűek, vagy s és t egyszínűek. Adjunk tehát v-nek és s-nek egy-egy teljesen új színt. Ez egy jó 102-színezése lesz G-nek. 3 pont