Kombinatorika és gráfelmélet I

1/2. PÓTZH, 2023. június 2. 10.15-11.45, T 601/2.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

Segítség: $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám.

1. Hány olyan F fa van a $v_1, \ldots, v_5$ csúcsokon, amelyre $\tau(F) = 2$?

2. A G teljes gráf csúcsai $v_1, \ldots, v_{2023}$. A v_iv_j $(i \neq j)$ él súlya 1 ha $i - j$ páros, és 2 ha $i - j$ páratlan. Hány minimális összsúlyú feszítőfa van G-ben?

3. Minimálisan hány éle lehet egy 100 csúcsú gráfnak, amelyben van Hamilton kör, de nincs benne Euler séta?

4. A G gráf csúcsai $v_1, \ldots, v_{48}$, v_i és v_j $(i \neq j)$ akkor és csak akkor vannak összekötve, ha ij osztható 24-gyel. Határozzuk meg G pontösszefüggőségi számát, $\kappa(G)$-t.

5. A (G, s, t, c) hálózatban egy él kapacitása x, a többi él kapacitása adott. Rögzített x-re $M(x)$ a maximális folyam nagysága. Tudjuk, hogy $M(100) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $2 \leq M(2) \leq 4$.

6. A G 100 csúcsú gráfra $\nu(G) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $e(G) \leq 100$, vagy 5 pontért azt, hogy $e(G) \leq 200$.
$e(G)$ G éleinek a száma.

Kombinatorika és gráfelmélet I

2. PÓTZH, 2023. június 2. 10.15-11.45, T 601/2.

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, és a **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Íròszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép, mobiltelefon, tévé, rádió használata és a dolgozatírás közben történő együttműködés.

Segítség: $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi'(G)$: élkromatikus szám.

1. G egy összefüggő síkbarajzolt gráf. Minden i-re $(3 \leq i \leq 21)$ pontosan egy darab i oldalú lapja van (az oldalak kiszámolásánál a határoló éleket multiplicitással számoljuk). Más lapja nincs. Hány csúcsa van G-nek?

2. G csúcsai $v_1, \ldots, v_{2023}$. A v_i és v_j csúcsok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 1$ vagy prímszám. Bizonyítsuk be hogy $\chi(G) = 4$.

3. Bizonyítsuk be hogy minden G egyszerű gráfra $\chi(G) \leq \chi'(G) + 1$.

4. Határozzuk meg az $e(G) - 100t(G)$ mennyiség maximális értékét, ha G tetszőleges 2023 csúcsú egyszerű síkbarajzolt gráf lehet. $e(G)$ és $t(G)$ G éleinek illetve tartományainak a száma.

5. G gráf csúcsai $v_1, \ldots v_{10}$ és $u_1, \ldots, u_{20}$. A $v_1, \ldots v_{10}$ csúcsok minden más v_i illetve u_i csúccsal össze vannak kötve, további él nincs. Határozzuk meg $\tau(G)$ értékét.

6. Maximimálisan hány éle lehet egy 6 csúcsú egyszerű G síkgráfnak, ha tudjuk, hogy $\tau(G) = 3$?