Kombinatorika és gráfelmélet I

1. PótZH, 2023. május 12. 10.15-11.45, T 601/2.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsokon, azzal a tulajdonsággal, hogy a fa nem tartalmazza a v_1v_2 élt, és ha hozzávesszük a fához, akkor a keletkező kör 99 hosszú (99 csúcsú)?

Mivel a keletkező kör 99 hosszú, egy csúcs nincs rajta, tehát egy él "lelóg" a körről. 2 pont

Válasszuk ki először, hogy v_1-en és v_2-n kívül melyik $100-3=97$ csúcs van a körön, ezt $\binom{98}{97}$-féleképpen tehetjük meg. 2 pont

A kapott 99 csúcson olyan kört kell keresnünk, ahol v_1 és v_2 szomszédosak. Ez megfelel az 99 csúcs egy olyan sorrendjének, ahol v_1 az első, v_2 az utolsó. Ez pedig megfelel a többi 97 csúcs egy sorrendjének, amibol 97! különböző van. 2 pont

Ezután még ki kell választani, hogy az utolsó csúcs a kör melyik csúcsához csatlakozzon, erre 99 lehetőség van. 2 pont

Tehát a válasz $\binom{98}{97} \cdot 97! \cdot 99 = 99!$. 2 pont

2. A K_{10} teljes 10 csúcsú gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_5$, $u_1, u_2, \ldots, u_5$. Minden i-re $(1 \le i \le 5)$ az u_iv_i élek súlya 1, az összes többi él súlya 2. Hány minimális összsúlyú feszítőfa van ebben a súlyozott gráfban?

Az összes minimális összsúlyú feszítőfát megtalálja a mohó algoritmus. Nézzük meg, hogyan futhat le. 1 pont

Először mindenképpen kiválasztja az összes u_iv_i élt, tehát ezek mindenképpen benne vannak minden minimális összsúlyú feszítőfában. 2 pont

A további élek ezeket az éleket, mint csúcsokat kötik össze, hogy fát alkossanak. Pontosabban, ha minden i-re összehúzzuk az u_i és v_i csúcsokat egy uv_i csúccsá, akkor a további élek az uv_i csúcsokon egy fát alkotnak. 2 pont

Ilyen fából a Cayley tétel szerint 5^3 darab van. 2 pont

Na de ezzel meg nem vagyunk kész! Minden ilyen uv_iuv_j él az eredeti gráfban négy különböző élnek felelhet meg: u_iu_j, u_iv_j, v_iu_j, v_iv_j. Tehát a fa mind a négy élére négy lehetőségünk van, ez összesen 4^4 lehetőség. 3 pont

Tehát a válasz 5^34^4. 1 pont

3. G csúcsai $v_1, \ldots, v_{2023}$. Legyen k tetszőleges egész. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha $i-j-k$ nem osztható 7-tel vagy nem osztható 17-tel (vagy egyikkel sem). Bizonyítsuk be hogy G tartalmaz Hamilton kört.
(Segítség: $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$.)

Legyen v_i egy tetszőleges csúcs. A v_j csúcs akkor *nem* szomszédja v_i-nek, ha (a) $i-j-k$ osztható 7-tel vagy (b) nem osztható 17-tel. 3 pont

Bármennyi is i és k, minden hetedik j rossz az (a) esetben és minden 17-ik a (b) esetben. Tehát $2023/7 = 289$ darab j-re lesz $i-j-k$ osztható 7-tel és $2023/17 = 119$ j-re lesz osztható 17-tel, vagyis legfeljebb $289+119 = 408$ v_j-vel nem szomszédos v_i. 4 pont

Tehát minden v_i foka, $d_i \ge 2022 - 408 = 1614$, és $1614 > 2023/2$. Ezért a Dirac tétel szerint van G-ben Hamilton kör. 3 pont

4. Határozzuk meg, hogy maximálisan hány éle lehet egy 5 csúcsú G gráfnak, amelynek pontösszefüggőségi száma $\kappa(G) = 1$.

Tegyük fel, hogy $\kappa(G) = 1$. Ekkor van G-nek egy elvágó pontja, v. Vagyis $G - v$ nem összefüggő, hanem legalább két összefüggő komponense van. 3 pont

Ekkor négy lehetőség van. A komponensek összmérete 4, tehát lehet $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$, $1 + 3$, $2 + 2$. 3 pont

Mindegyik esetben G élei a komponenseken belül és a komponensek és v között futhatnak. Ennek alapján az élek maximális száma a négy esetben 4, 5, 7, 6. 2 pont

Tehát legfeljebb 7 éle lehet, ez pedig elérhető, vegyünk egy teljes négyest, az ötödik pontot kössük össze közülük eggyel. 2 pont

5. Adott egy (G, s, t, c) hálózat. A javító utas algoritmussal 3 javítás után megkaptuk a maximális folyamot, amelynek a nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy van olyan él, amelynek a kapacitása legalább π.

Mivel 3 javítással eljutottunk a 0 nagyságú folyamtól a 10 nagyságúig, valamelyik lépésben legalább 10/3-ot javítottunk. 4 pont

Viszont a javító utas algoritmusban minden lépésben legfeljebb annyit javíthatunk, amennyi valamelyik él kapacitása a javító úton. 4 pont

Tehát van olyan él, amelynek a kapacitása legalább $10/3 > \pi$, ezzel kész is vagyunk. 2 pont

6. G egy nem összefüggő, 10 csúcsú gráf. Bizonyítsuk be, hogy elhagyható G-ből 2 csúcs úgy, hogy a kapott gráf sem összefüggő.

Legyen u és v G két csúcsa, amelyek különböző komponensekben vannak. Tehát G-ben nincs út u-ból v-be. 5 pont

Hagyjunk el két, u-tól és v-től különböző csúcsot. 2 pont

Ekkor a kapott gráf nem összefüggő, hiszen továbbra sem tartalmaz utat u-ból v-be. 3 pont