

Kombinatorika és gráfelmélet I  
1. ZH, 2023. április 28. 8.15-9.45, T 601/2.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány fa van a  $v_1, v_2, \dots, v_{100}$  csúcsokon, azzal a tulajdonsággal, hogy a fa tartalmazza a  $v_1 v_2$  élt, és ha elvesszük belőle, akkor mindkét kapott összefüggő komponens 50 csúcsú.

Azokat a fákat keressük, amelyek a  $v_1 v_2$  élből, a  $v_1$ -gyet tartalmazó, de  $v_2$ -t nem tartalmazó 50 csúcsú fából és a maradék 50 csúcsra (amely tartalmazza  $v_2$ -t de nem tartalmazza  $v_1$ -et) vett fából állnak. 3 pont

Előszöris kiválasztjuk a kapott két komponens csúcsait. A  $v_1$  és  $v_2$  tehát biztos, hogy különböző komponensben lesznek. A  $v_1$ -et tartalmazó komponens maradék 49 csúcsát ezért  $\binom{98}{49}$ -féleképpen választhatjuk ki. Ezzel természetesen kiválasztottuk a másik,  $v_2$  tartalmazó komponens csúcsait is. 3 pont

A  $v_1$ -et tartalmazó 50 csúcsra a Cayley tétel alapján  $50^{48}$  különböző feszítőfa van. Hasonlóan, a másik 50 csúcsra is  $50^{48}$  különböző feszítőfa van. 3 pont

Összegezve, a feltételeknek megfelelő fák száma  $\binom{98}{49} \cdot 50^{48} \cdot 50^{48} = \binom{98}{49} \cdot 50^{96}$ . 1 pont

2. A  $K_n$  teljes  $n$  csúcsú gráf ( $n \geq 3$ ) élein pozitív súlyok vannak úgy, hogy minden Hamilton út egy minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden feszítőfa minimális összsúlyú feszítőfa.

Belátjuk, hogy minden élnek ugyanannyi a súlya. Ebben esetben nyilván minden feszítőfa súlya ugyanannyi, tehát minden feszítőfa minimális összsúlyú feszítőfa. 3 pont

Legyen  $e$  és  $f$  két tetszőleges él. Vegyünk egy  $H$  Hamilton kört, amely mindkét élt tartalmazza. (Könnyen látható, hogy ilyen létezik.) 4 pont

Ekkor  $H - e$  és  $H - f$  is Hamilton utak, tehát a feltételek miatt ugyanannyi a súlyuk. Ebből következik, hogy  $e$  és  $f$  súlya is megegyezik. Ezzel kész is vagyunk. 3 pont

3.  $G$  egy 2023 csúcsú reguláris gráf (minden csúcsnak ugyanannyi a foka). Bizonyítsuk be, hogy  $G$ , vagy  $G$  komplementere,  $\bar{G}$ , tartalmaz Euler körsétát.

Tegyük fel, hogy  $G$ -ben minden csúcs foka  $r$ . Legyen  $e$   $G$  éleinek a száma. Ekkor  $2e = 2023r$  tehát  $r$  páros. 2 pont

$G$  komplementerében  $\bar{G}$ -ben minden pont foka  $2022 - r$ , ami ugyancsak páros. 2 pont

Ebből következik, hogy vagy  $r$ , vagy  $2022 - r$  legalább 1012. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy ez  $r$ . 2 pont

Ekkor  $G$  minden csúcsának a foka legalább 1012, vagyis minden összefüggő komponens tartalmaz legalább 1013 pontot. De akkor nem lehet, csak egy összefüggő komponens, hiszen két komponens együtt már több, mint 2023 csúcsú lenne. 2 pont

Tehát  $G$  összefüggő, minden csúcs foka páros, ezért tartalmaz Euler körsétát. (Ha  $2022 - r$  legalább 1012, akkor  $\bar{G}$ -rel érveltünk volna.) 2 pont

4. Határozzuk meg, hogy maximálisan hány éle lehet egy 5 csúcsú  $G$  gráfnak, amelynek élösszefüggőségi száma  $\lambda(G) = 1$ .

Tegyük fel, hogy  $\lambda(G) = 1$ . Ekkor van  $G$ -nek egy elvágó éle,  $e$ . Vagyis  $G - e$  nem összefüggő, hanem két összefüggő komponense van. 3 pont

Ekkor két lehetőség van: (1). az egyik komponensnek 1 csúcsa van, ekkor a másiknak 4, illetve (2). az egyik komponensnek 2 csúcsa van, a másiknak 3. 2 pont

$G$  élei a komponenseken belül vannak, kivéve az elvágó élt. Az első esetben tehát a gráfnak legfeljebb  $0 + 6 + 1 = 7$ , a második esetben pedig legfeljebb  $2 + 3 + 1 = 6$  éle lehet. Vagyis  $G$ -nek nem lehet több éle, mint 7. 3 pont

7 éle viszont lehet is: vegyünk egy teljes 4 csúcsú gráfot és egy ötödik csúcsot, ami a négy közül egy csúccsal össze van kötve. Tehát a válasz 7. 2 pont

5. Adott egy  $(G, s, t, c)$  hálózat. Ha minden él kapacitásához hozzáadunk 1-et, akkor a maximális folyam nagysága 10. Ha viszont minden él kapacitásából levonunk 1-et, akkor a maximális folyam nagysága 7. Határozzuk meg a maximális folyam nagyságát  $(G, s, t, c)$ -ben.

Legyen  $m$  a maximális folyam nagysága  $(G, s, t, c)$ -ben. A  $(G, s, t, c + 1)$  hálózatban a maximális folyam nagysága 10, tehát van egy 10 kapacitású vágás. 2 pont

Ha ez a vágás  $k$  élből áll, akkor a  $(G, s, t, c - 1)$  hálózatban a kapacitása  $10 - 2k$ . Viszont ez legalább 7, tehát  $10 - 2k \geq 7$ ,  $k \leq 3/2$  és  $k$  természetesen egész, tehát  $k = 1$ . 2 pont

Ennek az egy élből álló vágásnak a kapacitása  $(G, s, t, c)$ -ben 9, tehát  $m \leq 9$ . 1 pont

Most tegyük fel, hogy  $m < 9$ . Ekkor  $(G, s, t, c)$ -ben van egy  $m$  kapacitású vágás. Ha ez egy élből áll, akkor  $(G, s, t, c + 1)$ -ben lenne egy  $m + 1 < 10$  kapacitású vágás, ami ellentmondás. 2 pont

Ha legalább két élből áll, akkor meg  $(G, s, t, c - 1)$ -ben lenne egy legfeljebb  $m - 2 < 7$  kapacitású vágás, ez is ellentmondás. 2 pont

Tehát  $m = 9$ . Ilyen hálózatot egyébként könnyű konstruálni. 1 pont

6.  $G$  egy 100 csúcsú és 111 élű páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy  $\nu(G) \geq 2$ .

Tegyük fel, hogy  $\nu(G) \leq 1$ . Mivel  $G$ -nek van éle,  $\nu(G) \geq 1$ , tehát  $\nu(G) = 1$ . 2 pont

Mivel  $G$  páros gráf, a König tétel alapján ekkor  $\tau(G) = \nu(G) = 1$ , vagyis  $G$  élei lefoghatók 1 ponttal. 5 pont

De 1 ponttal legfeljebb 99 élt lehet lefogni, ami eppentmondás. Tehát  $\nu(G) \geq 2$ . 3 pont