Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2023. április 21

Páros gráfok, párosítások, Hall, Frobenius, Kőnig tételek.

Tudnivalók

$G(A, B, E)$ páros gráf, ha A és B a csúcsok halmaza, E az élek halmaza, és minden él A és B között fut. Legyen G egy tetszőleges gráf.

Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Egy $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élhalmaz **független**, vagy **párosítás**, ha nincs közös végpontjuk.

Egy ponthalmaz **lefogó**, ha G minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$: független élek maximális száma;

Minden G gráfra igaz, hogy $\nu(G) \leq \tau(G)$. (Mert a ν darab független él lefogásához is kell már ν darab pont.)

Tetszőleges X csúcshalmazra legyen $N(X)$ X szomszédainak a halmaza, vagyis azon csúcsok halmaza, amelyek legalább egy X−beli csúccsal össze vannak kötve.

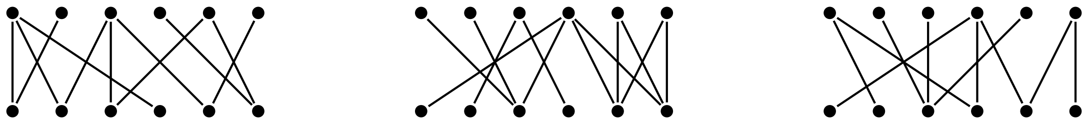
Legyen most $G = G(A, B, E)$ páros gráf, vagyis A és B a csúcsok halmaza, E az élek halmaza, és minden él A és B között fut.

Frobenius tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban teljes (minden csúcsot párosító) párosítás, ha $|A| = |B|$, és minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

Hall tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban A–t lefedő párosítás, ha minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

König tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



2. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.
4. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
5. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?
6. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
8. a. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G) \geq \nu(G)$ teljesül. b. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $2\nu \geq \tau \geq \nu$ számokhoz van olyan G gráf, amelyre $\nu(G) = \nu$ és $\tau(G) = \tau$.
9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
10. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k db különböző teljes párosítása van.
11. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

12. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
13. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
14. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)

Házi feladat

1. Legyen $G(A, B, E)$ páros gráf. Tudjuk, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq |A| - 1$, vagyis G tartalmaz $|A| - 1$ független élt.
2. Legyenek G csúcsai $v_1, \ldots, v_{12}$, v_i és v_j $(i \neq j)$ akkor és csak akkor vannak összekötve, ha ij osztható 6-tel. Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét (és bizonyítsuk be, hogy annyi).