

Kombinatorika és gráfelmélet I
Pótnyílt helyi, 2021. május 11, 13.30-16.00

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozathoz. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmeoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

A megoldásokat küldjék el 16.00 **előtt** a **geza@renyi.hu** címre! Kérem, olvashatóan írjanak, aki kézzel, az viszonylag nagy betűkkel és mindenki minden oldalra írja rá a nevét!

Minden írott anyag használható.

Az aláíráshoz 40%-ot kell elérni. Jó munkát!

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\Delta(G)$: maximális fokszám.

1. Hány olyan fa van a v_1, \dots, v_{10} csúcsokon, ahol $d_1 + d_2 + d_3 = 4$? (d_i a v_i csúcs fokszáma)

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| A Prüfer kódban minden csúcs sorszáma a fokszáma -1 -szer szerepel. | 1 pont |
| Ezért $d_1 + d_2 + d_3 = 4$ akkor és csak akkor, ha az 1, 2, 3 <i>összesen</i> 1-szer szerepel. | 4 pont |
| Számoljuk össze az ilyen Prüfer kódokat. Ez egy 8 hosszú számsorozat, egy helyen az 1, 2, 3 valamelyike áll, a többi 7 helyen meg a 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok valamelyike. | 1 pont |
| Az 1, 2, 3 helyét 8-féleképpen választhatjuk ki. Itt 3-féle szám állhat. | 2 pont |
| A többi 7 hely mindegyikén 7-féle szám lehet. Tehát a válasz $8 \cdot 3 \cdot 7^7$. | 2 pont |

2. A G gráf csúcsai v_1, \dots, v_{30} . Élei: $v_{3i-2}v_{3i-1}, v_{3i-2}v_{3i}, v_{3i-1}v_{3i}, i = 1, 2, \dots, 10$. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni G -hez, hogy a kapott gráfnak legyen Euler köre?

Akkor, hogy legyen Euler kör, a gráfnak izolált pontoktól eltekintve összefüggőnek kell lennie és minden fokszám párosnak kell lenni. A G gráf 10 diszjunkt háromszögből áll. Tehát most 10 komponens van, izolált pont nincs, és minden fokszám páros.

2 pont

Tehát az összefüggőség biztosítására minden háromszögből kell indítanunk legalább egy élt.

2 pont

Viszont ha egy háromszögből csak egy élt indítunk, akkor valamelyik csúcs foka 3, vagyis páratlan lesz. Tehát minden háromszögből legalább két élt kell indítani.

2 pont

Vagyis összesen legalább 10 élre van szükség.

2 pont

Ehnyit viszont elég is: Vegyünk egy-egy pontot mind a 10 háromszögből és adjunk hozzá G -hez egykört ezeken a pontokon. Ezzel a gráf összefüggő lett és minden fokszám páros, tehát van Euler kör.

2 pont

3. Egy $G(s, t, c)$ hálózatban a maximális folyam nagysága 100. Ha most minden kapacitást megnövelünk 1-gyel, a kapott $G(s, t, c + 1)$ hálózatban a maximális folyam nagysága 120. Bizonyítsuk be, hogy van olyan e él, amelynek az eredeti kapacitása $c(e) \leq 5$.

A Ford-Fulkerson tétel szerint $G(s, t, c)$ -ben a minimális, S, T vágás kapacitása 100.

1 pont

Tegyük fel, hogy ez a vágás k élből áll. Ekkor az S, T vágás kapacitása $G(s, t, c + 1)$ -ben $100 + k$.

3 pont

Viszont $G(s, t, c + 1)$ -ben a minimális vágás kapacitása 120. Tehát $100 + k \geq 120$, vagyis $k \geq 20$.

3 pont

Tehát az eredeti S, T vágás legalább 20 élből áll. $G(s, t, c)$ -ben az összkapacitásuk 100. Tehát a legkisebb kapacitásúnak a kapacitása legfeljebb $100/20 = 5$.

3 pont

4. G csúcsai v_1, \dots, v_{14} , v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha vagy (a) $i - j$ páratlan, vagy (b) $|i - j| = 2$, vagy (c) $|i - j| = 12$.

Határozzuk meg a $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékeket.

A G gráfban a $v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{13}v_{14}$ élek egy teljes párosítást alkotnak, ebből következik, hogy $\nu(G) = 7$. 4 pont

A Gallai tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy $\rho(G) = 14 - 7 = 7$. 1 pont

Most határozzuk meg a független pontok maximális számát $\alpha(G)$ -t. A gráf két 7 hosszú kör, a páros illetve a páratlan indexű csúcsokon, és köztük az összes él be van húzva. Tehát egy független ponthalmaznak nem lehet mind a két körön pontja. Vagyis az összes pontot az egyik 7 hosszú körrel kell választanunk. Innen viszont nem választhatunk szomszédos pontokat, tehát legfeljebb 3 pontot választhatunk. Ezért $\alpha(G) = 3$. 4 pont

Megint a Gallai alapján $\tau(G) = 11$. 1 pont

5. A G összefüggő gráfnak 2021 csúcsa van, $\Delta(G) = 20$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \leq 102$.

Vegyük észre, hogy G összefüggő, nem páratlan kör (hiszen akkor $\Delta = 2$ lenne) és nem teljes gráf (mert akkor $\Delta = 2020$ lenne), tehát alkalmazhatjuk a Brooks tételt: $\chi(G) \leq \Delta(G) = 20$. 5 pont

Színezzük ki G -t (legfeljebb) 20 színnel és legyen K a legnagyobb színosztály. 3 pont

Ekkor $|K| \geq 2021/20$ tehát $|K| \geq 102$ és K egy független ponthalmaz. Tehát $\alpha(G) \leq 102$. 2 pont

6. A G 100 csúcsú gráfból akárhogy elhagyunk 5 élt, a maradék gráf síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

Ha G -ben minden pont foka legfeljebb 4, vagyis $\Delta(G) \leq 4$, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq 5$, tehát kész vagyunk. 3 pont

Tehát tegyük fel, hogy $\Delta(G) \geq 5$. Legyen v egy legalább 5-fokú csúcs. Hagyjunk egy 5, v -re illeszkedő élt. 3 pont

A megmaradt gráf síkgráf a Négyszínétel alapján kiszínezhető 4 színnel. Ezután adjunk v -nek egy ötödik színt. Így nyugodtan visszatehetjük az öt elhagyott élt. 4 pont