Kombinatorika és gráfelmélet I

Nyílthelyi, 2021. május 7, 10.00-12.30

A megoldásokat küldjék el 12.30 **előtt** a **geza@renyi.hu** címre! Kérem, olvashatóan írjanak, aki kézzel, az viszonylag nagy betűkkel és mindenki minden oldalra írja rá a nevét!

Minden írott anyag használható.

Az aláíráshoz 40%-ot kell elérni. Jó munkát!

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\Delta(G)$: maximális fokszám.

1. Az F 39 csúcsú fában a csúcsok fokszámai csak két különböző értéket vesznek fel, minden fokszám vagy d_1 vagy d_2. Mik a lehetséges (d_1, d_2) számpárok? Minden lehetséges számpárhoz adjunk is egy megfelelő fát.

2. A G gráf csúcsai $v_1, \dots, v_{100}$ és u. Az u csúcs minden v_i-vel össze vannak kötve, a v_i és v_j csúcsok pedig akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i-j| = 1$ vagy 99. (Vagyis G egy 100 csúcsú kör és egy pont ami a kör minden pontjával össze van kötve.) Legkevesebb hány élt kell elvenni G-ből, hogy ne legyen Hamilton köre?

3. Egy $G(s,t,c)$ hálózatban **minden** él kapacitása x, kivéve az uv élt, amelynek 1 a kapacitása. Minden $x > 0$-ra (x nem feltétlenül egész) legyen $M(x)$ a maximális folyam nagysága $G(s,t,c)$-ben. Tudjuk, hogy $M(1) = 2$, $M(2) = 3$, határozzuk meg $M(100)$-at.

4. G csúcsai $v_1, \dots, v_{14}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha vagy (a) $i - j$ páratlan, vagy (b) $|i-j| = 2$, vagy (c) $|i-j| = 12$.
Bizonyítsuk be, hogy G pontösszefüggőségi száma, $\kappa(G) = 9$.

5. A G gráfnak 2021 csúcsa van, $\Delta(G) = 100$. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \leq 2000$.

6. A G 100 csúcsú gráfból akárhogy elhagyunk 2 csúcsot, a maradék gráf síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.