

Kombinatorika és gráfelmélet I
Nyílt helyi, 2021. május 7, 10.00-12.30

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozattól. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

A megoldásokat küldjék el 12.30 előtt a **geza@renyi.hu** címre! Kérem, olvashatóan írjanak, aki kézzel, az viszonylag nagy betűkkel és mindenki minden oldalra írja rá a nevét!

Minden írott anyag használható.

Az aláíráshoz 40%-ot kell elérni. Jó munkát!

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\Delta(G)$: maximális fokszám.

1. Egy 39 csúcsú fában a csúcsok fokszámai csak két különböző értéket vesznek fel, minden fokszám vagy d_1 vagy d_2 . Mik a lehetséges (d_1, d_2) számpárok? Minden lehetséges számpárhoz adjunk is egy megfelelő fát.

Legyen F egy ilyen fa. Az egyik fokszám nyilván az $d_1 = 1$ lesz, hiszen minden fának van levele. 2 pont

A másik fok d_2 . Tegyük fel, hogy k darab levél és $39 - k$ darab d_2 fokú csúcs van. Mivel F -nek 38 éle van és a fokszámok összege az élek számának a duplája, $k + d_2(39 - k) = 76$. 2 pont

Tehát $(d_2 - 1)k = 37$, vagyis $d_2 - 1$ osztója 37-nek. 2 pont

Szerencsére 37 prímszám, ezért d_2 lehetséges értékei 2 és 38. 2 pont

Mind a kétfő tényleg lehetséges, $d_2 = 2$ esetén F egy út, $d_2 = 38$ esetén meg csillag. 2 pont

2. A G gráf csúcsai v_1, \dots, v_{100} és u . Az u csúcs minden v_i -vel össze vannak kötve, a v_i és v_j csúcsok pedig akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - j| = 1$ vagy 99. (Vagyis G egy 100 csúcsú kör és egy pont ami a kör minden pontjával össze van kötve.) Legkevesebb hány élt kell elvenni G -ből, hogy ne legyen Hamilton köre?

G -ben van Hamilton kör, például $v_1, v_2, \dots, v_{100}, u$. 2 pont

Vegyünk el egy élt. Két esetet kell megkülönböztetni, hogy egy $v_i u$ élt hagyunk el, illetve egy $v_i v_{i+1}$ élt. (Az indexeket modulo 100 értjük, tehát $v_1 = v_{101}$, $v_0 = v_{100}$.) 2 pont

Ha egy $v_i u$ élt hagyunk el, akkor $v_1, v_2, \dots, v_{i+1}, uv_{i+2}, \dots, v_{100}$ egy Hamilton kör.

Ha egy $v_i v_{i+1}$ élt, akkor $v_1, v_2, \dots, v_i, uv_{i+1}, \dots, v_{100}$ egy Hamilton kör. 4 pont

Ha viszont például a $v_1 v_2$ és $v_1 u$ éleket hagyjuk el, akkor v_1 foka 1 lesz, tehát nem lesz Hamilton kör. Tehát a válasz 2. 2 pont

3. Egy $G(s, t, c)$ hálózatban **minden** él kapacitása x , kivéve az uv élt, amelynek 1 a kapacitása. Minden $x > 0$ -ra (x nem feltétlenül egész) legyen $M(x)$ a maximális folyam nagysága $G(s, t, c)$ -ben. Tudjuk, hogy $M(1) = 2$, $M(2) = 3$, határozzuk meg $M(100)$ -at.

Kétféle vágást kell megkülönböztetnünk, aszerint, hogy uv benne van, vagy nincs. Az első fajta közül legyen a legkisebb kapacitása $ax + 1$, ahol a nyilván egész. A második fajta közül legyen a legkisebb kapacitása bx , ahol b is nyilván egész. 2 pont

Tehát a Ford-Fulkerson tétel alapján $M(x) = \min(ax + 1, bx)$. 2 pont
Mivel $3 = M(2) = \min(2a + 1, 2b)$, és a, b egészek, $3 = 2a + 1$, tehát $a = 1$. 2 pont
Mivel $2 = M(1) = \min(a + 1, b)$, és $a = 1$, $2 = \min(2, b)$, tehát $b \geq 2$. 2 pont
Tehát $M(100) = \min(100a + 1, 100b) = \min(101, 100b) = 101$, mert $100b \geq 200$. 2 pont

4. G csúcsai v_1, \dots, v_{14} , v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha vagy (a) $i - j$ páratlan, vagy (b) $|i - j| = 2$, vagy (c) $|i - j| = 12$.

Bizonyítsuk be, hogy G pontösszefüggőségi száma, $\kappa(G) = 9$.

Látható, hogy minden pont foka 9, tehát $\kappa \leq 9$. 3 pont

A gráf két 7 hosszú kör, a páros illetve a páratlan indexű csúcsokon, és köztük az összes él be van húzva. Próbáljunk elvenni 8 csúcsot a gráfból. Ha marad páros és páratlan indexű csúcs is, akkor a megmaradt gráf összefüggő lesz, mert a páros és a páratlan indexű csúcsok között az összes él be van húzva. 3 pont

Tegyük fel, hogy az egyik osztályt, mondjuk a páratlan indexű csúcsokat mind elvettük. Ekkor már csak egy páros indexű csúcsot vehetünk el. De a páros indexű csúcsok egy 7 hosszú kört feszítenek, tehát maradni fog egy 6 hosszú út, ami összefüggő. Ezért $\kappa = 9$. 3 pont

5. A G gráfnak 2021 csúcsa van, $\Delta(G) = 100$. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \leq 2000$.

Mivel $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, $\chi(G) \leq 101$. 3 pont

Színezzük ki G -t 101 színnel. A legnagyobb színosztály legyen S . $|S| \geq 2021/101$ tehát $|S| \geq 21$. 3 pont

Vegyük a G összes csúcsát, kivéve S pontjait. Ezek egy L lefogó ponthalmazt alkotnak, hiszen S -en belül nincs él. 2 pont

És $|L| \leq 2021 - 21 = 2000$, tehát $\tau(G) \leq 2000$. 2 pont

6. A G 100 csúcsú gráfból akárhogy elhagyunk 2 csúcsot, a maradék gráf síkgráf. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

G nem lehet teljes gráf, mert a 100 csúcsú teljes gráfból elhagyva két csúcsot, a 98 csúcsú teljes gráfot kapjuk, ami nem síkgráf. 2 pont

Tehát léteznek olyan u, v csúcsok, amelyek nem szomszédosak. 2 pont

Hagyjuk el G -ből az u és v csúcsokat. A feltétel szerint a kapott G' gráf síkgráf. 2 pont

A Négyszíntétel szerint G' csúcsai kiszínezhetők 4 színnel. 2 pont

Az u és v csúcsoknak pedig adhatunk egy ötödik színt, mivel nem szomszédosak. 2 pont