Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. gyakorlat, 2021. április 12-13.

Kromatikus szám

$\chi(G)$: G kromatikus száma, G csúcsainak a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két összekötött pont különböző színű.)

$\Delta(G)$: maximális fokszám G-ben. $\omega(G)$: G klikkszáma, a legnagyobb teljes részgráf mérete.

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Brooks tétel: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

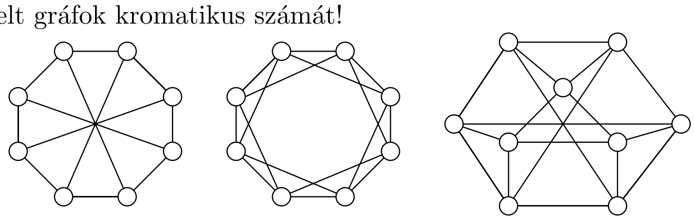
gyenge Brooks tétel: Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Minden pozitív egész k ra létezik olyan G_k gráf, melyre $\omega(G_k) = 2$, és $\chi(G_k) = k$.

Zykov konstrukció: Legyen Z_2 a teljes két csúcsú gráf. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a Z_k gráfot. Legyen Z_{k+1} a következő gráf. Vegyük Z_k k darab diszjunkt példányát. Ezek után minden lehetséges módon válasszunk ki egy-egy csúcsot mindegyik példányból, vegyünk fel ehhez a k-ashoz egy új csúcsot, es kössük össze a k-as elemeivel. Ekkor minden k-ra $\omega(Z_k) = 2$ és $\chi(Z_k) = k$.

Shift gráf: Legyen $m > 1$ rögzített. Legyenek S_m csúcsai az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i < j \leq m$. Két csúcs, (i, j) és (a, b) össze van kötve G-ben akkor és csak akkor, ha $j = a$ vagy $i = b$. Ekkor minden m-re $\omega(S_m) = 2$ és $\chi(S_m) \geq \log_2 m$.

1. Van-e a Z_k Zykov gráfnak Hamilton-köre?
2. (Mycielski konstrukció) Legyen $M_2 = K_2$. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és már meghatároztuk az M_k Mycielski gráfot. Legyenek M_k csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Az M_{k+1} gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_m$, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ és w. A $v_1, v_2, \ldots, v_m$ csúcsok éppen az M_k Mycielski gráfot feszítik, az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ csúcsok között nincs él, egy u_i és egy v_j csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha v_i és v_j össze van kötve. Végül pedig w-t kössük össze az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ csúcsokkal. Így kaptuk az M_k Mycielski gráfot.
   a. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k-ra $\omega(M_k) = 2$, vagyis M_k nem tartalmaz háromszöget.
   b. Bizonyítsuk be, hogy minden k-ra $\chi(M_k) = k$.
3. A Mycielski konstrukcióval megkapott G_k gráfok közül melyek tartalmaznak Euler-körsétát, és melyeknek van Hamilton-körük?
4. Van-e az $\binom{m}{2}$ pontú S_m shiftgráfnak Euler-körsétája?
5. Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!



6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
7. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
8. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
9. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
10. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

11. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
12. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
13. Mutassunk olyan 6 csúcsú G gráfot, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel.
14. Mutassuk meg, hogy minden G gráfra, ha a mohó színezést megfelelő csúcs-sorrendben végezzük, akkor optimális színezést ad, azaz $\chi(G)$ színnel színezi ki G-t.
15. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésében bármely színosztálynak van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.
16. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.
17. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül.
    Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)
18. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.
19. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
20. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
21. (*) Tegyük fel, hogy az n csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, azaz bármely két 3-színezésében ugyanazok a színosztályok. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább $2n - 3$ éle van.
22. Legyenek a G (végtelen) gráf csúcsai a sík pontjai, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve, ha egységtávolságot határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy $4 \leq \chi(G) \leq 7$.

    $\chi(G)$ meghatározása a híres Hadwiger-Nelson probléma, $\chi(G)$-t szokás a sík kromatikus számának is hívni. A legjobb ismert korlátok: $5 \leq \chi(G) \leq 7$.

Házi feladatok

1. Határozzuk meg az olyan n csúcsú G gráfok élszámának a maximumát, amelyekre $\chi(G) \leq 3$.

2. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

3. A G gráf csúcsai $v_1, \ldots, v_{100}$. A v_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $1 \leq |i - j| \leq 3$ vagy $|i - j| = 16$. Határozzuk meg $\chi(G)$-t, G kromatikus számát.