

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2021. március 29-30.  
görög betűk, König, Gallai, Tutte

## Tudnivalók

$\alpha(G)$ : független pontok maximális száma;  $\tau(G)$ : lefogó pontok minimális száma;  
 $\nu(G)$ : független élek maximális száma;  $\rho(G)$ : lefogó élek minimális száma.

**König tétel:** (a) Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ . (b) Ha  $G$  páros és nincs izolált pontja, akkor  $\alpha(G) = \rho(G)$ .

**Gallai tétel:** (a) Ha  $G$ -ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\tau(G) + \alpha(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma. (b) Ha  $G$ -ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\nu(G) + \rho(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma.

Ha  $X$  a  $G = (V, E)$  gráf csúcsainak részhalmaza akkor  $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$  az  $X$  halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

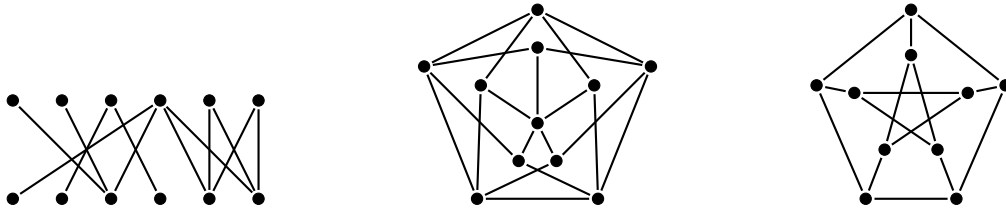
**Frobenius tétel:** Legyenek  $A$  és  $B$  a  $G$  páros gráf színosztályai. Pontosán akkor létezik  $G$ -nek teljes párosítása, ha  $|A| = |B|$  és az  $A$  színosztály pontjainak tetszőleges  $X$  részhalmazára  $|X| \leq |N(X)|$ .

**Hall Tétel:** Pontosán akkor létezik  $G$ -nek  $A$ -t fedő párosítása, ha az  $A$  színosztály pontjainak tetszőleges  $X$  részhalmazára  $|X| \leq |N(X)|$ .

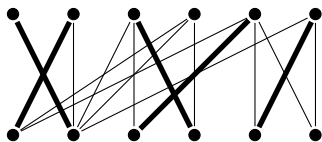
**Tutte tétel:** A  $G$  véges gráfban pontosán akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges  $X$  csúcsalra  $G - X$ -nek legfeljebb  $|X|$  páratlan komponense van:  $c_p(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V$  esetén.

	max független	min lefogo	Konig, ps graf
pont	$\alpha$	+ $\tau$	$=n$ Gallai nincs hurokel
el	$\nu$	+ $\rho$	$=n$ Gallai nincs iz pont
			Konig ps graf, nincs iz pont

1. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\alpha(G)$  értékeket!



- Legyen  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2004}\}$ . A  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) csúcsok között akkor menjen él, ha  $i + j$  hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg  $\alpha(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\tau(G)$  értékeit.
- Legyen  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{74}\}$ . A  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) csúcsok között akkor menjen él, ha  $i + j$  és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az  $\alpha(H)$ ,  $\nu(H)$ ,  $\rho(H)$ ,  $\tau(H)$  értékét!
- Legyen  $G$  egy  $2n$  pontú gráf, mely egy  $2n - 1$  pontú  $L$  útból és egy  $c$  pontból áll, ami  $L$  minden pontjával össze van kötve. Mennyi  $\tau(G)$ ?
- Lássuk be, hogy egy  $n$  pontú egyszerű  $G$  gráfban  $\tau(G) = n - 1$  akkor és csak akkor, ha  $G = K_n$ .
- Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



7. Jelölje  $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát,  $\tau(G)$  pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy  $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$ .
8. Jelölje  $\omega(G)$  a  $G$  gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz  $G$  komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy  $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$ .
9. Egy 100 csúcsú egyszerű  $G$  gráfban bármely 3 csúcs között van legalább 2 él. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben van teljes párosítás.

### Házi feladat

1. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű  $G$  gráfnak  $X$  egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek  $x, y$  és  $z$  különböző  $X$ -beli csúcsok. Tartalmazhat-e a  $G + xy + yz + zx$  gráf teljes párosítást?
2. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  össze van kötve akkor és csak akkor, ha  $|i - j| < 7$ . Határozzuk meg  $\kappa(G)$ -t,  $G$  pontösszefüggőségi számát.
3. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  össze van kötve akkor és csak akkor, ha  $|i - j| = 1, 3$ , vagy  $5$ . Határozzuk meg az  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  értékeket.