Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2021. március 29-30.

görög betűk, Kőnig, Gallai, Tutte

Tudnivalók

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;
$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Kőnig tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. (b) Ha G páros és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

Gallai tétel: (a) Ha G–ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma. (b) Ha G–ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.

Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak részhalmaza akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$ az X halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

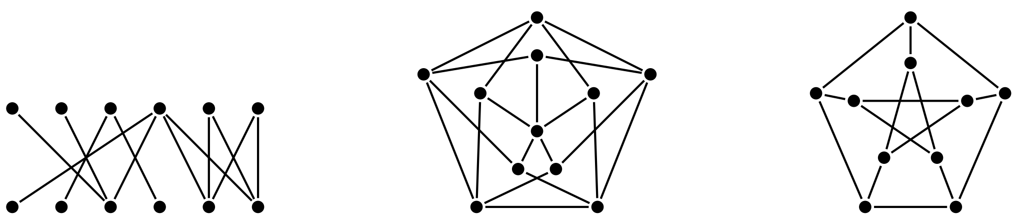
Frobenius tétel: Legyenek A és B a G páros gráf színosztályai. Pontosan akkor létezik G-nek teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

Hall Tétel: Pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

Tutte tétel: A G véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges X csúcshalmazra $G - X$-nek legfeljebb $|X|$ páratlan komponense van: $c_p(G - X) \leq |X|$ $\forall X \subseteq V$ esetén.

	max fuggetlen	min lefogo	Konig, ps graf	
pont	α	+ τ	$=n$	Gallai nincs hurokel
el	ν	+ ρ	$=n$	Gallai nincs iz pont
			Konig ps graf, nincs iz pont	

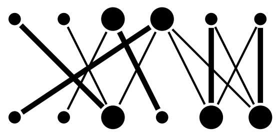
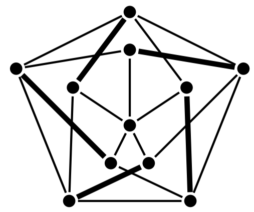
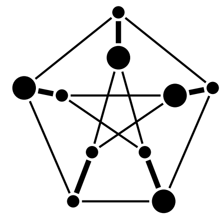
1. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



Megoldás: 1. Már láttuk az előző feladatsorban, hogy $\nu = 5$, mivel páros gráf, nincs izolált pont, hurokél, alkalmazhatjuk Kőnig és Gallai tételeit, $\tau = \nu = 5$, $\rho = 12 - \nu = 7$, $\alpha = 12 - \tau = 7$.

2. A gráfnak 11 csúcsa van és tartalmaz 5 független élet (ábra) több meg nem lehet, mert 6 független élnek már 12 végpontja lenne. Tehát $\nu = 5$. Ebből, Gallai tétele alapján $\rho = 11 - 5 = 6$. Sajnos a Kőniget nem alkalmazhatjuk, mert nem páros a gráf. Ha független ponthalmazt akarunk kiválasztani és a középső pontot bevesszük, akkor a többi a külső 5 hosszú körről van, de onnan legfeljebb 2-t választhatunk. Ha nem vesszük be a középsőt, akkor kivehetjük a szomszédait, ez 5 pont. Többet ekkor sem választhatunk, mert az 5 független él (ábra) mindegyikének csak az egyik végét választhatjuk. Tehát $\alpha = 5$, és a Gallai miatt $\tau = 6$.

3. Itt $\nu = 5$, ennyi független él van (ábra), több meg nem fér el, mert 10 csúcs van. Tehát $\rho = 5$ (Gallai). Ha független ponthalmazt akarunk kiválasztani, a külső körről is legfeljebb 2 pontot választhatunk és a belsőről is. Ennyit lehet is (ábra). Gallai alapján ekkor $\tau = 6$.

2. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.

   Megoldás: Csoportosítsuk a pontokat az indexük 3-as maradéka szerint: V_0, V_1, V_2, mindháromban 668 csúcs van. A V_0 és V_1 között egy teljes páros gráf van (V_0 és V_1 között minden él be van húzva), a V_2 pedig egy teljes gráfot feszít (V_2-n belül minden él be van húzva). Nézzük külön először a V_0 és V_1 közötti egy teljes páros gráfot. Itt $\nu = \tau = \alpha = \rho = 668$. Most nézzük a V_2 által feszített teljes gráfot. Itt $\nu = 334$, $\rho = 334$, $\tau = 667$, $\alpha = 1$. A megfelelő paramétereket összeadva: $\nu(G) = 1002$, $\rho(G) = 1002$, $\tau(G) = 1335$, $\alpha(G) = 669$.

3. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!

   Megoldás: A fő megfigyelés: ez egy páros gráf, mert ha $i + j$ és 74 relatív prímek, akkor $i + j$ páratlan. Tehát minden él egy párost és egy páratlant köt össze. Ezért a Gallain kívül a Kőniget is alkalmazhatjuk. Minden $1 \leq i \leq 37$-re v_i és v_{75-i} szomszédosak, hiszen 75 és 74 relatív prímek. Ezek az élek pedig egy teljes párosítást alkotnak. Ezért $\nu(G) = 37$. Ennek alapján a Kőnig és Gallai tételekből azt kapjuk, hogy mind a négy paraméter 37.

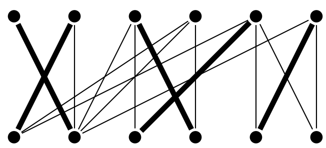
4. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?

   Megoldás: A gráfnak $2n$ pontja van és van Hamilton köre, tehát van $n$független éle (vagyis teljes párosítása). Tehát $\nu = n$, ezért $\tau \geq n$. Viszont n ponttal le is lehet fogni az éleket, vegyük minden második pontot a Hamilton körön, de úgy, hogy a c pont is köztük legyen. Tehát $\tau = n$.

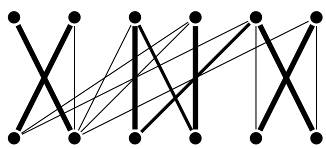
5. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.

   Megoldás: Az világos, hogy $\tau(K_n) = n - 1$: ennyi pont lefogja az összes élt, $n - 2$ pontot választva viszont lesz nem lefogott él, a kimaradó lét pont között. Tegyük fel, hogy $G \neq K_n$. Ekkor van két nem szomszédos csúcsa, mondjuk x és y. Viszont ekkor a többi $n - 2$ csúcs lefogja az összes élt, tehát $\tau \leq n - 2$, semmiképpen sem $n - 1$.

6. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!

   Megoldás: Ha elkészítjük a szokásos hálózatot, akkor az adott folyamhoz kell javító utat keresni. Vagy: az egyetlen alsó fedetlen pontból kell alternáló utat keresni az egyetlen felsőbe. Majd ezen kicserélni a párosítás-éleket a nem-párosítás élekre.

7. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.

   Megoldás: Egy csúccsal legfeljebb $\Delta(G)$ élt tudunk lefogni.

8. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz G komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$.

   Megoldás: Egy klikk és egy független ponthalmaz legfeljebb egy pontban metszheti egymást.

9. Egy 100 csúcsú egyszerű G gráfban bármely 3 csúcs között van legalább 2 él. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

   Megoldás: 1. Belátjuk a Tutte feltételt: ha elhagyunk k pontot, akkor max k páratlan méretű komponenst kapunk. Először legyen $k \geq 2$, hagyjunk el k pontot. Ha a maradékben legalább 3 komponens lenne, akkor választhatnánk 3 komponensből egy-egy pontot, amelyek között egyáltalán nincs él, ami lehetetlen. Legyen $k = 1$, hagyjunk el 1 pontot. Marad 99 pont. Az előbbiek alapján legfeljebb 2 komponensünk van, de ezek közül pontosan 1 páratlan méretű, úgyhogy készen vagyunk.

   2. Minden pont foka legalább 98, mert ha lenne 2 nem-szomszédja, akkor a pont és a két nem-szomszéd megsértenék a feltételt. De akkor a Dirac tétel alapján van a gráfban Hamilton kör, ennek minden második éle teljes párosítást alkot.

Házi feladat

1. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X-beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G + xy + yz + zx$ gráf teljes párosítást?

2. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{1000}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i - j| < 7$. Határozzuk meg $\kappa(G)$-t, G pontösszefüggőségi számát.

3. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{1000}$, v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $|i - j| = 1$, 3, vagy 5. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ értékeket.