

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2021. március 22.

*Páros gráfok, párosítások, Hall, Frobenius, König tételek.*

## Tudnivalók

$G(A, B, E)$  páros gráf, ha  $A$  és  $B$  a csúcsok halmaza,  $E$  az élek halmaza, és minden él  $A$  és  $B$  között fut. Legyen  $G$  egy tetszőleges gráf.

Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Egy  $e_1, e_2, \dots, e_k$  élhalmaz **független**, vagy **párosítás**, ha nincs közös végpontjuk.

Egy ponthalmaz **lefogó**, ha  $G$  minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\tau(G)$ : lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$ : független élek maximális száma;

Minden  $G$  gráfra igaz, hogy  $\nu(G) \leq \tau(G)$ . (Mert a  $\nu$  darab független él lefogásához is kell már  $\nu$  darab pont.)

Tetszőleges  $X$  csúcsalmazra legyen  $N(X)$   $X$  szomszédainak a halmaza, vagyis azon csúcsok halmaza, amelyek legalább egy  $X$ -beli csúcscsal össze vannak kötve.

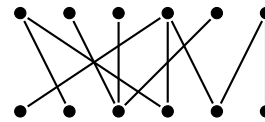
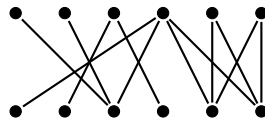
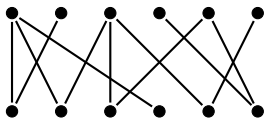
Legyen most  $G = G(A, B, E)$  páros gráf, vagyis  $A$  és  $B$  a csúcsok halmaza,  $E$  az élek halmaza, és minden él  $A$  és  $B$  között fut.

**Frobenius tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban teljes (minden csúcst párosító) párosítás, ha  $|A| = |B|$ , és minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

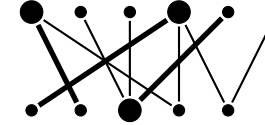
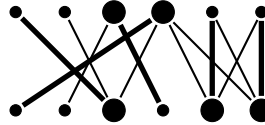
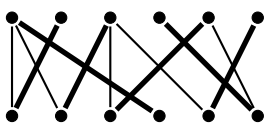
**Hall tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban  $A$ -t lefedő párosítás, ha minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

**König tétel:** (a) Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ .

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



*Megoldás:*



1:  $\nu = 6$ . Az ábra mutat 6 független élt, tehát  $\nu \geq 6$ . De több nem lehet, mert ez egy teljes párosítás. 2: Az ábrán látható 5 független él (tehát  $\nu \geq 5$  és 5 lefogó pont (tehát  $\tau \leq 5$ ). Mivel minden gráfban  $\nu \leq \tau$ , összerakva  $5 \leq \nu \leq \tau \leq 5$  tehát  $\nu = 5$ . 3: Hasonló, az ábrán látható 4 független él és 4 lefogó pont, tehát  $\nu = 4$ .

Általános recept: ha kevés lefogó pontot keresünk, akkor az 1-fokú pontokra csatlakozó éleket a másik végponttal érdemes lefogni. Ha pedig sok független élt keresünk, akkor érdemes először az 1-fokú pontokra csatlakozó éleket választani.

2. Adott  $n$  fiú és  $n$  lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.

*Megoldás:* Tekintsük a fiú-lány nem-rokon páros gráfot. Tehát az egyik osztály a fiúk ( $A$ ), a másik a lányok ( $B$ ), egy fiút és egy lányt összekötünk, ha nem rokonok. Ebben a gráfban szeretnénk találni egy teljes párosítást. A feltételek alapján minden fiú fokszáma legalább  $n - 1$  és minden lány fokszáma legalább 1. Ellenőrizzük a Frobenius feltételeket.  $|A| = |B| = n$  rendben. Innen két lehetőségünk van, nézzhetjük  $A$  illetve  $B$  felől.

1. Legyen  $X \subseteq A$ . Ha  $|X| = n$ , vagyis  $X = A$ , akkor  $N(X) = B$ , hiszen minden lány fokszáma legalább 1. Tehát  $|X| = |N(X)| = n$ . Ha  $|X| < n$ , akkor, mivel minden fiú fokszáma legalább  $n - 1$ ,  $|N(X)| \geq n - 1$ , tehát  $|X| \leq |N(X)| = n$ . Tehát minden  $X \subseteq A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ , a Frobenius miatt van teljes párosítás.

2. Legyen  $X \subseteq B$ . Ha  $|X| \geq 2$ , akkor  $N(X) = A$ , hiszen minden fiú fokszáma legalább  $n - 1$ , minden fiú össze van kötve  $X$  valamelyik pontjával. Tehát  $|X| \leq |N(X)| = n$ . Ha  $|X| = 1$ , akkor, mivel minden lány fokszáma legalább 1,  $|N(X)| \geq 1$ , tehát  $1 = |X| \leq |N(X)|$  és megint kész vagyunk.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  páros gráf összefüggő és az  $A$  osztályában a fokszámok különbözők, akkor  $G$ -nek van  $A$ -t fedő párosítása.

*Megoldás:* Mivel  $G$  összefüggő, minden csúcs foka legalább 1. Legyen  $X \subseteq A$ ,  $|X| = k$ . Mivel minden fok különböző,  $X$  csúcsai közül a legnagyobb fokú foka legalább  $k$ . Vagyis  $|N(X)| \geq k$ . Tehát  $k = |X| \leq |N(X)|$ , a Hall tétel alapján van  $A$ -t fedő párosítás.

4. Egy kiránduláson  $n$  házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani  $2n$  különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább  $n$  fajtát szeret a  $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

*Megoldás:* Legyen a páros gráfban az egyik osztály ( $A$ ) a  $2n$  darab csoki. A másik osztály ( $B$ ) pedig a  $2n$  darab ember. Ellenőrizzük a Frobenius feltételt. Nyilván  $|A| = |B| = 2n$ . Legyen  $X \subseteq B$ . Ha  $X$  tartalmazza egy házaspár mindkét tagját, akkor a feltétel szerint  $N(X) = A$ , tehát  $|N(X)| = 2n$ , ennek alapján  $|X| \leq |N(X)| = 2n$ . Ha  $X$  minden házaspárból max 1 embert tartalmaz, akkor  $|X| \leq n$ , viszont a felétel szerint  $|N(X)| \geq n$ , tehát  $|X| \leq |N(X)|$  és már készen is vagyunk!

5. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.

*Megoldás:* Legyen a két osztály szokás szerint  $A$  és  $B$ , minden fokszám  $r$ . Igazoljuk a Frobenius feltételeket. Az élek száma,  $|E| = r|A|$ , hiszen minden  $A$ -beli csúcsból  $r$  él megy ki és ímindent pontosan egyszer számoltunk. Ugyanígy  $|E| = r|B|$ , és ebből  $|A| = |B|$ . Most legyen  $X \subseteq A$ ,  $N(X)$  a szomszédok halmaza, és legyen  $E_X$  az  $X$  és  $N(X)$  közti élek halmaza. Ekkor, mivel minden  $X$ -beli pont foka  $r$ ,  $|E_X| = r|X|$ . Minden  $N(X)$ -beli pont foka is  $r$ . Az  $E_X$ -beli élek mindegyikének az egyik végpontja  $N(X)$ -ben van, ugyanakkor  $N(X)$ -ből kimehet olyan él is, ami nem tartozik  $E_X$ -hez. Tehát  $|E_X| \leq r|N(X)|$ . Az előzővel együtt:  $|X| \leq |N(X)|$ . Tehát teljesül a Frobenius tétel feltétele, van teljes párosítás.

6. A  $G$  irányított gráf minden csúcsából  $k$  él indul és  $k$  él érkezik. Igaz-e, hogy  $G$ -nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek  $G$  minden csúcsán áthaladnak?

*Megoldás:* Képezzük a  $G'$  irányítatlan páros gráfot. Minden  $v$  csúcsot helyettesítsünk egy  $v_{ki}$  és egy  $v_{be}$  csúccsal. Ha volt egy  $uv$  él  $G$ -ben, akkor húzzuk be az  $u_{ki}v_{be}$  élt. Az íkapott  $G'$  nyilván páros gráf, egyik osztálya a  $v_{ki}$ , másik osztálya a  $v_{be}$  csúcsokból áll. Ráadásul minden csúcs foka éppen  $k$ . Az előző feladatból tudjuk, hogy a reguláris páros gráfnak van teljes párosítása. Vegyük a teljes párosításnak megfelelő éleket  $G$ -ben. Minden csúcsnak a kifoka és a befoka is 1. Tehát ezek az élek pontdiszjunkt irányított köröket alkotnak, amelyek  $G$  minden csúcsán áthaladnak.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.

*Megoldás:* A gráf minden összefüggő komponense egy páros hosszú kör. Minden ilyen komponensben pontosan két teljes párosítás van. Tehát ha  $k$  komponens van, akkor összesen  $2^k$  teljes párosítás van.

8. a. Bizonyítsuk be, hogy minden véges  $G$  gráfra  $2\nu(G) \geq \tau(G) \geq \nu(G)$  teljesül. b. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $2\nu \geq \tau \geq \nu$  számokhoz van olyan  $G$  gráf, amelyre  $\nu(G) = \nu$  és  $\tau(G) = \tau$ .

*Megoldás:* a.  $G$ -ben van  $\nu$  darab független él, már ezek lefogásához is kell  $\nu$  darab pont, tehát  $\nu \leq \tau$ . Ugyanakkor ha veszünk  $\nu$  darab független élt, az egy maximális független élhalmaz, tehát minden további élnek van közös végpontja ezen  $\nu$  él valamelyikével. Vagyis a  $\nu$  él  $2\nu$  végpontja lefogja az összes élt. Tehát  $2\nu \geq \tau$ .

b. Ha  $G$  egy 2 pontú, 1 élű gráf, akkor  $\nu = \tau = 1$ . Ha  $G$  egy háromszög, akkor  $\nu = 1$ ,  $\tau = 2$ . Ennek alapján már könnyű: vegyük  $2\nu - \tau$  darab él és  $\tau - \nu$  darab háromszög diszjunkt unióját.

9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!

*Megoldás:* Tekintsük a fiú-lány ismerőség páros gráfot. Tehát az egyik osztály a fiúk ( $A$ ), a másik a lányok ( $B$ ), egy fiút és egy lányt összekötünk, ha ismerik egymást. Ebben a gráfban szeretnénk találni egy teljes párosítást.

A feltételek alapján minden pont foka legalább 13. Ellenőrizzük a Frobenius feltételeket.  $|A| = |B| = 25$  rendben.

Legyen  $X \subseteq A$ . Mivel minden fiú fokszáma legalább 13,  $|N(X)| \geq 13$ , tehát ha Ha  $|X| \leq 13$ , akkor  $|X| \leq |N(X)|$ . Ha pedig  $|X| > 13$ , akkor  $N(X) = B$ , hiszen minden lány fokszáma legalább 13, tehát lehetetlen, hogy az  $X$ -be tartozó fiúk közül egyet sem ismer. Ezért  $|X| \leq |N(X)| = 25$ . Tehát minden  $X \subseteq A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ , a Frobenius miatt van teljes párosítás.

10. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan  $k$  db különböző teljes párosítása van.

*Megoldás:* Egy páratlan, legalább  $k$  hosszú kör, amelynek  $k$  pontja össze van kötve egy plusz ponttal.

11. Igaz-e, hogy tetszőleges véges  $G$  gráf mindazon élei, amik  $G$  valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

*Megoldás:* Persze, hogy nem. Egy páros sok csúcsú teljes gráf minden éle szerepel teljes párosításában, de messze nem páros gráf.

12. Valaki véletlenszerűen szétszortott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab  $A$ ). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  $J$ ,  $Q$ ,  $K$ ,  $A$ . Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)

*Megoldás:* Definiálunk egy páros gráfot.  $A$ : a paklik.  $B$ : a figurák. Nyilván  $|A| = |B| = 13$ . Kössünk össze minden paklit (illetve a megfelelő csúcsot) a benne levő figurákkal. Ha ugyanabból a figurából több van benne, használjunk többszörös éleket. Ez egy reguláris páros gráf lesz, minden pont foka 4. Korábban láttuk, hogy reguláris egyszerű páros grafban van teljes párosítás. A bizonyítás változtatás nélkül működik abban az esetben is, ha megengedünk párhuzamos éleket. Ennek alapján tehát van teljes párosítás. Ezután minden pakliból a párosításban vele szomszédos figurát vesszük ki.

13. Adott egy  $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan  $k$  darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható  $n$  darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

*Megoldás:* Breaking news! Definiálunk egy páros gráfot!!  $A$ : sorok.  $B$ : oszlopok. Él: akkor és csak akkor, ha a megfelelő sor megfelelő oszlopában van 1-es. Nyilván  $|A| = |B| = n$  és minden pont foka  $k$ , tehát van teljes párosítás. Az ezeknek megfelelő  $n$  darab 1-es pont jó.

### Házi feladat

- Legyen  $G(A, B, E)$  páros gráf. Tudjuk, hogy minden  $X \subseteq A$  esetén  $|N(X)| \geq |X| - 1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\nu(G) \geq |A| - 1$ , vagyis  $G$  tartalmaz  $|A| - 1$  független élt.
- Legyen  $G$  egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy  $\nu(G) \geq 6$ . ( $\nu(G)$  a független élek maximális számát jelöli.)
- Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, \dots, v_{12}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) akkor és csak akkor vannak összekötve, ha  $ij$  osztható 6-tal. Határozzuk meg  $\nu(G)$  értékét (és bizonyítsuk be, hogy annyi).