

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

6. gyakorlat, 2021. március 19.

Magasabb összefüggőség, Menger

Tudnivalók:

A G gráf k -szorosán (pont)összefüggő, ha legalább $k + 1$ csúcsa van és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb csúcsot, a megmaradt gráf összefüggő.

A G gráf k -szorosán élösszefüggő, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élt, a megmaradt gráf összefüggő.

Világos, hogy ha G k -szorosán pont- vagy élösszefüggő, akkor $k-1$ -szeresen is az. A G gráf (pont)összefüggőségi száma, $\kappa(G)$, a legnagyobb k , amelyre G k -szorosán (pont)összefüggő. A G gráf élösszefüggőségi száma, $\lambda(G)$, a legnagyobb k , amelyre G k -szorosán élösszefüggő.

Minden G gráfra $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq d_{\min}$. (Durván szólva élekkal nehezebb szétszedni a gráfot, mint pontokkal, és a minimális fokú pontot mindig le tudjuk vágni a csatlakozó élek elhagyásával.)

Menger tételek: (4 tétel együtt) G egy [irányított/irányítatlan] gráf, s, t két csúcsa.

G -ben az [irányított/irányítatlan] [pontdiszjunkt/éldiszjunkt] $s - t$ utak maximális száma

= az [irányított/irányítatlan] $s - t$ utakat lefogó [pontok/élek] minimális száma.

A pont-pontdiszjunkt esetben feltesszük, hogy nincs (irányított) $s - t$ él, és a lefogó pontok különböznek s -től és t -től.

Bizonyítás: folyamokkal.

További Menger tételek: G irányítatlan gráf k -szorosán (pont)összefüggő \Leftrightarrow legalább $k + 1$ csúcsa van és bármely két csúcsa között van k pontidegen út.

G irányítatlan gráf k -szorosán élösszefüggő \Leftrightarrow bármely két csúcsa között van k élidegen út.

Dirac tétel: G k -szorosán (pont)összefüggő \Rightarrow bármely k pontján át van kör.

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?

Megoldás: Két teljes n csúcsú gráf, egy közös csúccsal. Itt $\lambda = n - 1$, $\kappa = 1$. Ebből az is látszik, hogy nem lehet κ függvényében becsülni λ -t.

2. Tetszőleges $1 < \kappa < \lambda$ pozitív egészekre konstruáljunk G gráfot, amire $\lambda(G) = \lambda$ és $\kappa(G) = \kappa$.

Megoldás: Két teljes $\kappa + 1$ csúcsú gráf, λ darab közös csúccsal.

3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\lambda(K_n)$ ill. $\kappa(K_n)$ élösszefüggőségi ill. pontösszefüggőségi számát. Ugyanez a kérdés a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra.

Megoldás: $\kappa(K_n) = n - 1$ (a „legalább $k + 1$ csúcsa van” feltétel miatt) $\lambda(K_n) = n - 1$: ha az egy csúcsra illeszkedő $n - 1$ élt hagyjuk el, a gráf szétesik. Ha szét akarjuk szedni egy x és egy $n - x$ méretű komponensre, akkor legalább $x(n - x)$ élt el kell hagyni, ennek a minimuma $n - 1$.

$\kappa(K_{n,n}) = n$: ha mindkét osztályban marad pont, akkor a megmaradt gráf összefüggő. Tehát az egyik osztályt teljesen el kell hagyni. Így viszont szét is esik.

$\lambda(K_{n,n}) = n$: Ha az egy csúcsra illeszkedő n élt hagyjuk el, a gráf szétesik. Ha szét akarjuk szedni úgy, hogy az egyik komponensben a két osztályban a illetve b a másikban meg $n - a$ illetve $n - b$ pont legyen, akkor el kell hagynunk legalább $a(n - b) + b(n - a) = (a + b)n - 2ab$ élt. Ennek a minimuma n , kis vacakolással látszik. (Pl feltehetjük, hogy $n > a \geq n/2$, ekkor érdemes b -t növelni, tehát $b = n$, ekkor viszont legjobb, ha $a = n - 1$.)

4. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy $\kappa(G) = 3$.

Megoldás: Mivel van 3-fokú csúcs, $\kappa(G) \leq 3$. Ha két pontot hagyunk el, ebből (a szimmetriák miatt) összesen 4 különböző lehetőség van, mindegyik esetben összefüggő marad a gráf.

5. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?

Megoldás: Minden csúcs fokának legalább 4-nek kell maradni, tehát maradnia kell legalább $(4 \cdot 10)/2 = 20$ élnek, vagyis $\max \binom{10}{2} - 20 = 25$ élt hagyhatunk el. Ha viszont két éldiszjunkt Hamilton-kört hagyunk meg, akkor az 4-élösszefüggő lesz. Tehát a válasz 25.

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely n csúcsú k -összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!

Megoldás: Minden pont foka legalább k , $d_{\min} \geq \kappa \geq k$ tehát legalább $kn/2$ éle van.

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges r -reguláris ($r > 1$) egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő!

(r -reguláris = minden fok r)

Megoldás: Legyen a két osztály A és B . Tegyük fel, hogy egy A -beli pontot elhagyva a gráf szétesik két komponensre. Tekintsük az egyik komponenst, aminek A_1 illetve B_1 pontja van a két osztályban. A ketto közötti élek száma $|A_1| \cdot r$, illetve másképp összeszámolva $|B_1| \cdot r - x$, ahol x az elhagyott pontba menő élek száma. Ez szigorúan 0 és r között van, hiszen a gráf összefüggő volt. Tehát a két számolás nem adhatja ugyanazt az eredményt. (Egyik osztható r -rel, a másik nem.)

8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G véges gráf esetén $\delta(G) \geq \lambda(G) \geq \kappa(G)$ teljesül. ($\delta(G)$ G -ben a legkisebb fokszám.)

Megoldás: $\delta(G) \geq \lambda(G)$: már megbeszéltük, hagyjuk el a legkisebb fokú pontra illeszkedő éleket, ezzel szétesik a gráf. $\lambda(G) \geq \kappa(G)$: Ötlet: ha λ éllel szét tudjuk szedni a gráfot, akkor mindegyiknek hagyjuk el valamelyik végét, így is szétesik a gráf, csak vigyázzunk, hogy ne fogyjon el valamelyik komponens.

Ha a gráfunk teljes gráf, K_n , akkor $\lambda = \kappa = n - 1$. Tfh G nem teljes gráf. Tegyük fel, hogy van λ darab él amiket elhagyva az A és B komponenseket kapjuk. Ha van $a \in A$, $b \in B$, amelyek nem voltak szomszédosak G -ben, akkor minden élnek vagyjuk el az a -t és b -től is különböző végpontját. A gráf szétesett, viszont a és b megmaradt.

Ha nincs ilyen a , b , akkor viszont van $c, d \in A$ (vagy $c, d \in B$) amelyek nem voltak szomszédosak G -ben. Ekkor hagyjuk el az összes többi pontot, ez legfeljebb λ darab pont és a gráf szétesett.

9. Mutassuk meg, hogy a G egyszerű gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha bármely két csúcsára található olyan kör G -ben, amely ezen csúcsokat tartalmazza. Igazoljuk, hogy egy izolált pontot nem tartalmazó, egyszerű G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két élén keresztül vezet G -nek köre.

Megoldás: 1. A Menger tételből azonnal következik. Ha G 2-összefüggő, akkor bármely két pont között van két pontdiszjunkt út, ezek pedig egy kört alkotnak. Ha viszont bármely két ponton át van kör, akkor van köztük két pontdiszjunkt út, ekkor viszont G 2-összefüggő. 2. Ha bármely két élén át vezet kör és nincs izolált pont, akkor nyilván bármely két ponton át van kör, és az előbb láttuk, hogy ekkor 2-összefüggő. Tegyük fel, hogy G 2-összefüggő. Ekkor nyilván nincs izolált pont. Belátjuk, hogy bármely két élén át vezet kör. Legyen a két él uv és xy (lehet az is, hogy pl $u = x$). Vegyünk fel egy új w pontot és kössük össze u -val és v -vel, meg egy z pontot és kössük össze x -szel és y -nal. A Jó Öreg Menger Tétel szerint a kapott gráfban a wz pontidegen utak max száma egyenlő a w -t z -től elválasztó pontok minimális számával (nyilván w , z nem szomszédosak). Ha ez a szám 0, akkor G nem lett volna összefüggő. Ha 1, akkor a w -t z -től elválasztó pontot elhagyva maga G is szétesik, ami lehetetlen. Tehát van két pontidegen út. Ezeket összerakva az uv és xy élekkel (és a xz , yz , uw , vw éleket elhagyva) éppen egy kört kapunk az uv és xy éleken át.

10. Tegyük fel, hogy a G gráf k -összefüggő. Vegyünk fel egy új x pontot, és kössük össze G k különböző pontjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott G' gráf is k -összefüggő!

Megoldás: Továbbra is igaz, hogy legfeljebb $k-1$ pontot elhagyva a gráf összefüggő marad: ha x -et elhagyjuk, akkor a maradékból eggyel kevesebbet hagyunk el, összefüggő marad. Ha x megmaradt, akkor x -et is elhagyva a maradék gráf összefüggő, viszont x valamelyik szomszédja is megmaradt, ezen keresztül x is be van kötve.

11. Igazoljuk Dirac tételét: ha $\kappa(G) \geq k \geq 2$, akkor G bármely k pontjához található G -nek olyan köre, amely mind a k pontot tartalmazza.

Megoldás: k szerinti indukció, a $k = 2$ esetet láttuk. Legyen $k > 2$ és tegyük fel, hogy kisebb értékekre már beláttuk az állítást. Legyen G k -összefüggő és v_1, \dots, v_k adott k pont. Az indukciós feltevés miatt van kör v_1, \dots, v_{k-1} -en keresztül. Vegyünk egy új x csúcsot és kössük össze a kör minden pontjával.

Ha a körnek legalább k csúcsa van, akkor a kapott gráf is k -összefüggő, ezért lesz x és v_k között k pontdiszjunkt út. Skatulya-elv miatt lesz kettő, amelyek ugyanahhoz az ívhez vezetnek a körön (v_1, \dots, v_{k-1} $k - 1$ ívre bontja a kört), ott bővítjük a kört az utakkal úgy, hogy v_k -n is átmenjen.

Ha a körnek csak $k - 1$ csúcsa van, akkor a kapott gráf $(k - 1)$ -összefüggő, ezért lesz x és v_k között $k - 1$ pontdiszjunkt út, ezek közül két olyannal bővítünk, amelyek a körben szomszédos csúcsokhoz vezetnek.

12. Mutassuk meg, hogy a 2-összefüggő ill. 2-élösszefüggő gráfoknak van fülfelbontása. Azaz, a 2-őf gráfok pontosan azok, amelyek felépíthetők egyetlen csúcsból fülek egymás utáni hozzáadásával. Itt minden fül a már felépített félkész gráf két különböző csúcsa közti olyan út, amelynek belső csúcsai nem szerepelnek az eddig felépített gráfban. A 2-élőf gráfok fülfelbontására hasonló, de megengedve, hogy egy fülnek a két vége ugyanaz a csúcs legyen. (Irányított gráfokra hogyan terjeszthetők ki ezek az állítások?)

Megoldás: Amit fülfelbontással építünk fel, az 2-élőf ill. 2-őf, hisz egy él ill. csúcs elhagyásától nem esik szét.

Másik irány: 2-élőf eset: G -ben van kör, ez lesz az az első fül. Ezután újabb füleket próbálunk hozzáadni. Ha G -nek van olyan éle, amit még nem adtunk hozzá, de a végpontokat már felépítettük, akkor az az él fülként bevezethető. Ha ilyen él nincs, és G még nincs kész, akkor van olyan v pontja G -nek, amit még nem építettünk fel. Legyen u egy már felépített pont. Van G -ben két éldiszjunkt uv -út, ennek a felépítetlen része éppen jó lesz következő fülnek. pontőf-re kicsit trükkösebb: a már megépített pontokat kössük össze egy új x csúccsal. Van két pontdiszjunkt xu út, ennek az új részei kiadnak egy fülecskét.

13. Igazoljuk, hogy tetszőleges G véges, irányítatlan gráfnak pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása (azaz olyan, amelyre bármely két csúcs között mindkét irányba van irányított út), ha G kétszeresen élösszefüggő.

Megoldás: Fülfelbontás segítségével. A füleket mindig irányítsuk egy irányba. (Hogy minden fül egy irányított út legyen.)

14. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u -ból v -be is és v -ből w -be is k éldiszjunkt irányított út akkor G -ben létezik u -ból w -be is k éldiszjunkt irányított út.

Megoldás: Tekintsük G -t egy hálózatnak, minden él kapacitása 1. A feltétel szerint a max uv -folyam és a max vw -folyam nagysága is legalább k . Tegyük fel, hogy ennek ellenére van egy k -nál kisebb uw -vágás. Ez egyben vagy uv , vagy vw -vágás is, ami lehetetlen. Tehát a minimális uw -vágás kapacitása legalább k , ezért van k nagyságú uw -folyam. Az Egészértékűségi Lemma szerint ez csupa egész folyamattal is megvalósítható, ami itt egy 0/1-folyam (minden élen 0 vagy 1). Ez viszont tartalmaz k darab éldiszjunkt irányított utat.

15. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r -elemű halmazok, és $V(G) = A \cup B \cup C$ a G gráf csúcshalmaza, valamint legyen $uv \in E(G)$, ha u és v nem ugyanabból az r -elemű halmazból valók. Mekkora $\kappa(G)$?

Megoldás: Ha legalább két osztályban marad pont, akkor a megmaradt gráf összefüggő, ezért legalább $2r$ pontot el kell hagyni hogy szétessen. Ennyit lehet is, két osztály elhagyásával. Tehát $\kappa(G) = 2r$.

16. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.

Megoldás: Minden él helyett vegyük be az oda-vissza irányított éleket, ebben a gráfban két pont között ugyanannyi pontdiszjunkt irányított út van, mint az eredetiben. Ennek meghatározásához, mondjuk s és t között, csináljuk a Menger tételes trükköt: helyettesítsünk minden más v csúcsot egy v_{be} és v_{ki} csúccsal, egyikbe a be-élek, másikkól a ki-élek, köztük egy irányított él. Itt pontdiszjunkt helyett már éldiszjunkt utakat keresünk, ezt pedig maximális folyam kereséssel, javító utas módszerrel megtalálhatjuk. Ezt megcsináljuk minden pontpárra.

17. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?

Megoldás: A foksámösszeg legfeljebb $2(2n - 2) = 4n - 4$, tehát van legfeljebb 3-fokú csúcs, 3-nál magasabb összefüggőség nem érhető el.

Mivel a K_4 két három hosszú útra szétbontható, így a 3 él- ill. pontösszefüggőség elérhető. Több csúcsra: egyik fa egy Hamilton út, a másik a hiányzó él, amivel Hamilton kör lesz, a kör leghosszabb áltói, és ezek kiegészítve fává. Ez 3-ös.

18. Igazoljuk, hogy ha a G gráf 2019-pontú és 32-összefüggő, akkor G bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 64 élű út.

Megoldás: Ha a két csúcs szomszédos, akkor kész vagyunk. Ha nem: a két ponton kívül még 2017 másik pont van, ezeken fut 32 pontdiszjunkt út a két pont között, melyek közül a legrövidebb legfeljebb 63 belső pontot tartalmaz.

19. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden foksám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k -ös!

Megoldás: Ha $k - 1$ pontot elhagyva a gráf szétesik, akkor a kisebb oldalon maradt pontok fokszáma legfeljebb $(n - (k - 1))/2 - 1 + (k - 1) = (n + k - 2)/2 - 1/2$, túl kevés!

Házi feladat

- Igazoljuk, hogy ha az azonos pontalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)
- Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, ill. 7?