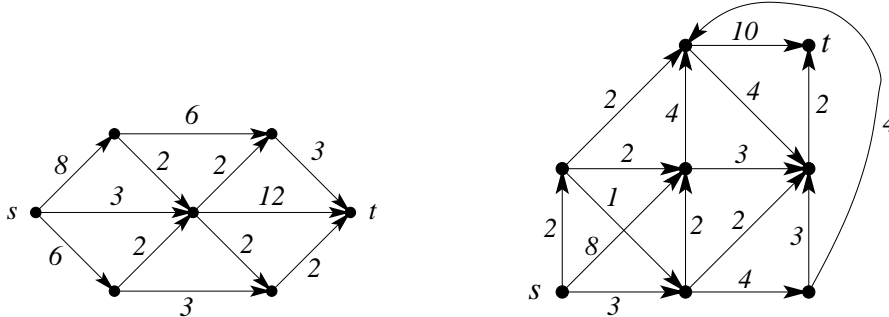


Kombinatorika és gráfelmélet 1.

5. gyakorlat, 2021. március 8.

Hálózatok, folyamok

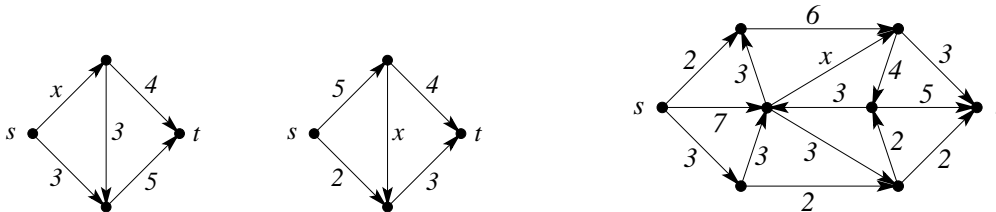
1. Adjunk meg egy-egy maximális folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges.



2. Határozzuk meg a maximális folyam értékét az alábbi hálózatokban!



3. a) Az előző feladat hálózataiban válasszuk valamelyik él kapacitását a feltüntetett helyett c -nek, és határozzuk meg, hogyan függ a maximális folyamnagyság a c kapacitás értékétől.
 b) Szintén az előző feladat hálózatait tekintve döntsük el, melyik élt kellene a gráfban törölni ahhoz, hogy a létrejövő hálózatban a maximális folyam nagysága a lehető legkisebb legyen.
4. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, c) hálózatban az s - t tartalmazó, t -től diszjunkt X és az Y ponthalmazok mindegyike minimális kapacitású st -vágást határoz meg. Mutassuk meg, hogy az $X \cap Y$ és $X \cup Y$ ponthalmazokhoz is minimális kapacitású st -vágás tartozik.
5. Igaz-e, hogy minden hálózatban van olyan e él, amelynek a kapacitását ε -nal csökkentve (ahol $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$) a maximális folyamnagyság is ε -nal csökken?
 Igaz-e az, hogy minden hálózatban van olyan e él amihez létezik egy pozitív ε mennyiség úgy, hogy ha e kapacitását ε -nal növeljük (ahol $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$), akkor a maximális folyamnagyság is ε -nal növekszik?
 Ha a fenti állítások valamelyike nem igaz, akkor hogyan lehet eldönteni egy adott hálózatban, hogy létezik-e olyan él, ami rendelkezik a kérdésben leírt tulajdonsággal?
6. Adott a D irányított gráf valamint D élein a c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D -ben m nagyságú st -folyam és m nagyságú tw folyam is, akkor D -ben létezik m nagyságú sw folyam.
7. Határozzuk meg a nemnegatív x függvényében a maximális folyam értékét az alábbi hálózatokban!



8. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 15.

9. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden csúcs megfelel az $A = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy részhalmazának. Tetszőleges $X, Y \subseteq A$ részhalmazokra legyen a megfelelő x és y csúcsok közti él (mindkét irányban) kapacitása $|X \cap Y|$. Legyen s és t az $\{1\}$ illetve $\{n\}$ részhalmazoknak megfelelő csúcs. Határozzuk meg a maximális $s - t$ folyam nagyságát!

Házi feladat

1. Irányítsuk a kocka élhálózatának éleit az s csúcsból az átellenes t csúcs felé. Hogyan kell kiosztani a 12 él közt 4 db 1-es, 2-es ill. 3-as kapacitást, hogy a kapott hálózatban a maximális folyam nagyság a lehető legnagyobb legyen?
2. A (G, s, t, c) hálózatban az egyik él, e kapacitása $c(e) = x$. A többi él kapacitása állandó, nem függ x -től. Legyen $M(x)$ a maximális folyam nagysága x függvényében. Tudjuk, hogy $M(1) = 1$, $M(100) = 10$. Határozzuk meg $M(2)$ értékét.