

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

5. gyakorlat, 2021. március 8.

*Hálózatok, folyamok*

## Tudnivalók:

Legyen  $G$  egy irányított gráf,  $s$  (forrás) és  $t$  (nyelő) két csúcsa,  $c$  pedig egy függvény, amely minden  $e$  élhez egy  $c(e) \geq 0$  kapacitást rendel. Ekkor a  $(G, s, t, c)$  négyest *hálózatnak* hívjuk. Most tegyük fel, hogy  $f$  is egy függvény, amely minden  $e$  élhez egy  $f(e) \geq 0$  számot rendel.

Ha  $e = uv$ , ahol  $u$  az  $e$  kezdőpontja,  $v$  a végpontja, akkor  $f(e)$  helyett természetesen írhatunk  $f(uv)$ -t is.

Az  $f$  függvényt *folyamnak* hívjuk, ha a következő két feltétel teljesül:

1. Minden  $e$  élre  $0 \leq f(e) \leq c(e)$ .
2. Minden  $v \neq s, t$  csúcsra  $\sum_u f(uv) = \sum_u f(vu)$ .

A másodikat Kirchoff szabálynak, vagy csomóponti szabálynak hívjuk. (Jelentése: ugyanannyi megy be, mint ki.)

Ha  $f$  folyam, akkor  $m(f) = \sum_u f(su) - \sum_u f(us) = \sum_u f(ut) - \sum_u f(tu)$ ,  $m(f)$  a folyam *nagysága*. ( $m(f)$  az  $s$ -ből netto kimenő folyam, ami ugyanannyi, mint ami netto megerkezik  $t$ -be.)

Legyen  $V(G) = S \cup T$ , ahol  $S \cap T = \emptyset$ ,  $s \in S$ ,  $t \in T$ . Ilyenkor az  $(S, T)$  pár *vágásnak* nevezzük.

Az  $(S, T)$  vágás kapacitása  $c(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(uv)$ . (A jó irányba menő élek kapacitásainak az összege.) Könnyű: ha  $f$  folyam és  $(S, T)$  vágás, akkor  $m(f) \leq c(S, T)$ .

Ford-Fulkerson tétel:  $\max_{f \text{ folyam}} m(f) = \min_{(S, T) \text{ vágás}} c(S, T)$ .

Bizonyítás: javító utas algoritmussal. Tegyük fel, hogy van egy  $f$  folyam.  $G'$  *javító gráf*: A csúcsai ugyanazok, mint  $G$  csúcsai. Ha  $G$ -ben van egy  $uv$  él, amelynek a kapacitása  $c(uv)$ , a folyam rajta  $f(uv)$ , akkor akkor:

1. Ha  $f(uv) = 0$ , akkor behúzzuk  $G'$ -be az  $uv$  élt,  $c(uv)$  kapacitással.
2. Ha  $0 < f(uv) < c(uv)$ , akkor behúzzuk  $G'$ -be az  $uv$  élt,  $c(uv) - f(uv)$  kapacitással és a  $vu$  élt,  $f(uv)$  kapacitással.

3. Ha  $f(uv) = c(uv)$ , akkor behúzzuk  $G'$ -be a  $vu$  élt,  $c(uv) = f(uv)$  kapacitással. (Tehát a  $G'$  hálózat azt modellezi, hogy milyen változtatásokhoz van jogunk.)

Ha  $G'$ -ben van út  $s$ -ből  $t$ -be, akkor ezen az úton megváltoztathatjuk (javíthatjuk)  $f$ -et. Ha pedig nincs javító út, akkor ennek az az oka, hogy  $f$  optimális. Legyen  $S$  azon csúcsok halmaza, akik elérhetők  $s$ -ből javító úton,  $T$  a többi. Ennek a kapacitása  $c(S, T) = m(f)$ .

$G'$ -ben van út  $s$ -ből  $t$ -be  $\Leftrightarrow m(f)$  nem maximális.

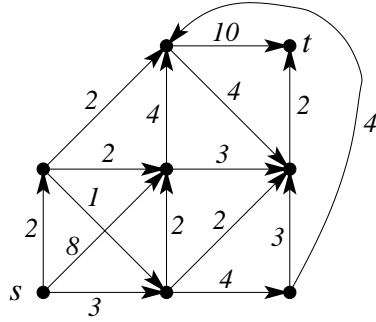
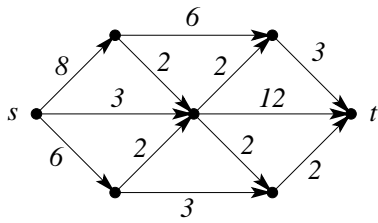
Ebből algoritmust is kaphatunk, javító utas algoritmus: induljunk ki a csupa 0 folyamból. javító gráf, ha nincs javító út, kész vagyunk. Ha van, javítunk, új folyam, új javító gráf, stb, amíg véget nem ér.

Ha minden kapacitás egész, akkor a javító utas algoritmus véget ér, megtalálja a max folyamot. Egészértékűségi Lemma: Ha minden kapacitás egész, akkor van olyan max folyam, ami minden élen egész.

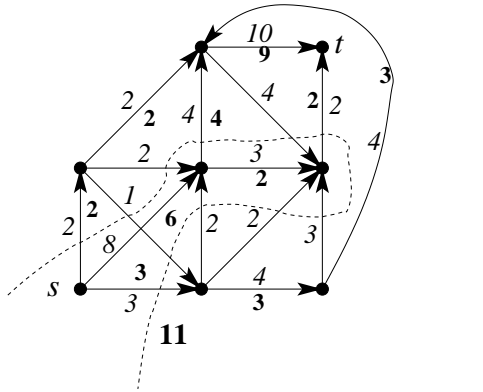
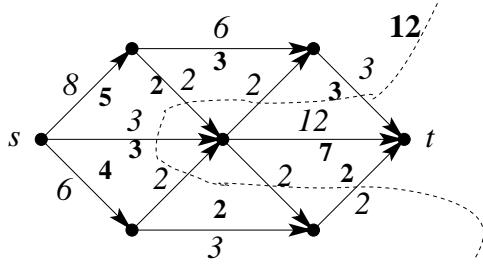
Ha nem egészek a kapacitások: lehetséges, hogy a javító utas algoritmus nem ér véget, sőt, nem is a max folyamhoz konvergál.

Edmonds-Karp: Ha mindig a *legrövidebb* javító úton javítunk, akkor a javító utas algoritmus (csúcsok számában) polinom időben véget ér.

1. Adjunk meg egy-egy maximális folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges.



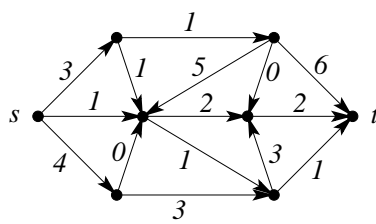
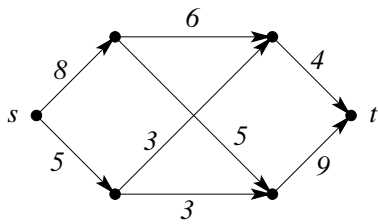
Megoldás:



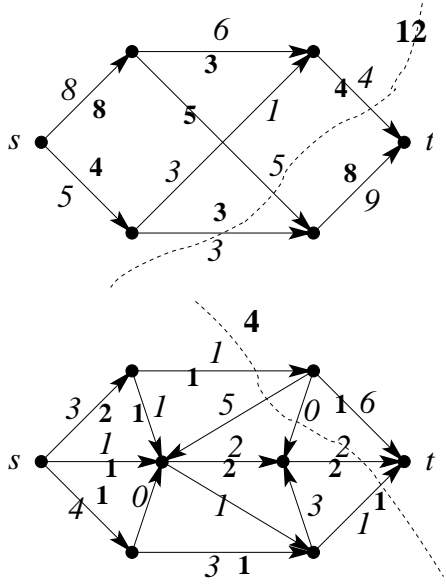
(Elnevezést, kicsit rondák az ábrák, itthon csak ilyeneket tudok.) 1. A javító utas algoritmust futtatva megkaphatjuk a fenti, 12 nagyságú folyamot és hozzá a 12 kapacitású vágást.

2. Hasonlóan, itt a válasz 11.

2. Határozzuk meg a maximális folyamot az alábbi hálózatokban!

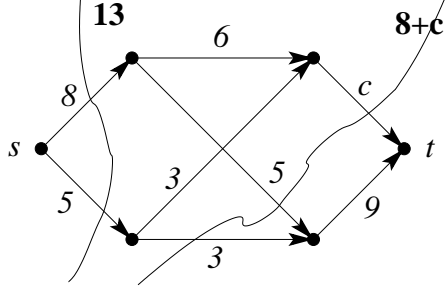


Megoldás: Ugyanúgy, mint az előbb, csak itt kevesebb lépés kell: a válaszok: 12 és 4.



3. a) Az előző feladat hálózataiban válasszuk valamelyik él kapacitását a feltüntetett helyett  $c$ -nek, és határozzuk meg, hogyan függ a maximális folyam nagyság a  $c$  kapacitás értékétől.  
 b) Szintén az előző feladat hálózatait tekintve döntsük el, melyik élt kellene a gráfban törölni ahhoz, hogy a létrejövő hálózatban a maximális folyam nagysága a lehető legkisebb legyen.

Megoldás:



- a). Először általánosságban. Hogy függhet  $c$ -től a max folyam nagyság? Nézzük a vágásokat. Legyen  $A$  a legkisebb olyan vágás kapacitása, ami nem tartalmazza a  $c$  (változó) kapacitású élt. És legyen  $B + c$  legkisebb olyan vágás kapacitása, ami tartalmazza a  $c$  kapacitású élt. A max folyam nagyság minden  $c$ -re  $\min(A, B + c)$ . Ha  $A > B$ , akkor ez  $B + c$ , ha  $c \leq A - B$  és  $A$  ha  $c \geq A - B$ . Ha  $A \leq B$ , akkor ez  $A$  minden  $c$ -re. Ha nincs is olyan vágás, ami nem tartalmazza a  $c$  kapacitású élt (vagyis  $A$  nem létezik) akkor a válasz mindig  $B + c$ .
- Ha  $c$ -t nagyon nagyra választjuk, és megoldjuk a folyam feladatot, akkor megkapjuk  $A$ -t. Ha  $c$ -t 0-nak választjuk, akkor vagy olyan minimális vágást kapunk, ami tartalmazza a  $c$  kapacitású élt, ekkor ennek kapacitása a  $B$ , vagy nem, ekkor  $A < B$ .
- Most konkrétan, legyen a 2. feladat első ábrán a jobb felső él kapacitása  $c$ . Itt nem nehéz látni, hogy  $A = 13$ ,  $B = 8$ , tehát a válasz  $\min(13, 8 + c)$ .
4. Tegyük fel, hogy a  $(D, s, t, c)$  hálózatban az  $s$ -t tartalmazó,  $t$ -től diszjunkt  $X$  és az  $Y$  ponthalmazok mindegyike minimális kapacitású  $st$ -vágást határoz meg. Mutassuk meg, hogy az  $X \cap Y$  és  $X \cup Y$  ponthalmazokhoz is minimális kapacitású  $st$ -vágás tartozik.

Megoldás: Az egyszerűség kedvéért legyen  $c(S, \bar{S}) = c(S)$  minden  $S$  halmazra, amire  $s \in S$  és  $t \notin S$ . Be lehet látni, hogy minden  $X, Y$ -ra  $c(X) + c(Y) \geq c(X \cap Y) + c(X \cup Y)$ . (Végig kell nézni a különböző

típusú éleket, hogy melyik oldalon hogyan számítanak.) Ebből, mivel  $c(X)$  és  $c(Y)$  minimálisak,  $c(X \cap Y)$  és  $c(X \cup Y)$  is minimálisak.

5. Igaz-e, hogy minden hálózatban van olyan  $e$  él, amelynek a kapacitását  $\varepsilon$ -nal csökkentve (ahol  $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$ ) a maximális folyamtnagyság is  $\varepsilon$ -nal csökken?

Igaz-e az, hogy minden hálózatban van olyan  $e$  él amihez létezik egy pozitív  $\varepsilon$  mennyiség úgy, hogy ha  $e$  kapacitását  $\varepsilon$ -nal növeljük (ahol  $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$ ), akkor a maximális folyamtnagyság is  $\varepsilon$ -nal növekszik?

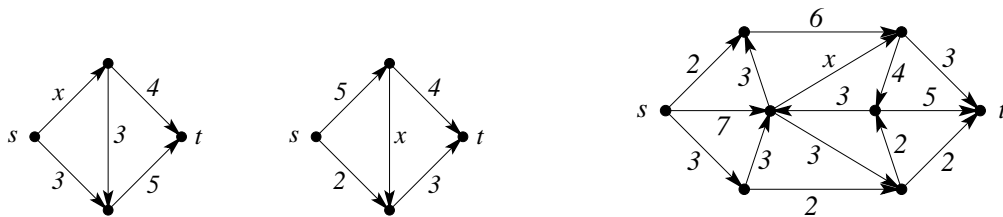
Ha a fenti állítások valamelyike nem igaz, akkor hogyan lehet eldönteni egy adott hálózatban, hogy létezik-e olyan él, ami rendelkezik a kérdésben leírt tulajdonsággal?

*Megoldás:* 1. Igen, ha  $e$  benne van egy minimális vágásban. 2. Nem feltétlenül, csak olyan élekre igaz, ami minden minimális vágásban benne van. 3. Meg kell nézni, hogy van-e olyan él, ami minden minimális vágásban benne van. Egyenként egy-egy él kapacitását megváltoztatjuk végtelenre és megnézzük, hogy nőtt-e a max folyam. Ha nem, akkor volt egy min vágás, ami elkerülte az élünket. Ha igen, akkor nem volt.

6. Adott a  $D$  irányított gráf valamint  $D$  élein a  $c$  kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha  $s, t$  és  $w$  a  $D$  olyan csúcsai, hogy létezik  $D$ -ben  $m$  nagyságú  $st$ -folyam és  $m$  nagyságú  $tw$  folyam is, akkor  $D$ -ben létezik  $m$  nagyságú  $sw$  folyam.

*Megoldás:* Legyen  $(S, T)$  egy minimális  $sw$  vágás, kapacitása  $c$ . Ha  $c \geq m$ , akkor a Ford-Fulkerson alapján készen vagyunk: van  $c$  nagyságú  $sw$  folyam. Ha  $c < m$ , akkor viszont ez a  $c$  kapacitású vágás egyben egy  $st$  vágás, vagy egy  $tw$  vágás. (Attól függően, hogy  $t \in T$ , vagy  $t \in S$ .) Ami ellentmondás, mert nincs  $m$ -nél kisebb  $st$  illetve  $tw$  vágás.

7. Határozzuk meg a nemnegatív  $x$  függvényében a maximális folyamtnagyságát az alábbi hálózatokban!



*Megoldás:*  $\min(9, 3 + x)$  illetve  $\min(7, 6 + x)$ . A harmadikhoz nem volt kedvem.

8. Egy  $(G, s, t, c)$  hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyamtnagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyamtnagysága legalább 15.

*Megoldás:* 1. Vegyük a három 10 nagyságú folyamtnagyság összegének a felét, ez egy megengedett folyamtnagyság, nagysága 15.

2. Tekintsük a minimális vágást a teljes hálózatban, tegyük fel, hogy a kapacitása  $c < 15$ . Ekkor ebben a vágásban valamelyik két színt tekintve egy legfeljebb  $2c/3 < 10$  nagyságú vágást kapnánk, ami ellentmondás.

9. Egy  $(G, s, t, c)$  hálózatban minden csúcs megfelel az  $A = \{ 1, 2, \dots, n \}$  halmaz egy részhalmazának. Tetszőleges  $X, Y \subseteq A$  részhalmazokra legyen a megfelelő  $x$  és  $y$  csúcsok közti él (mindkét irányban) kapacitása  $|X \cap Y|$ . Legyen  $s$  és  $t$  az  $\{1\}$  illetve  $\{n\}$  részhalmazoknak megfelelő csúcs. Határozzuk meg a maximális  $s - t$  folyamtnagyságát!

*Megoldás:*  $2^{n-1} - 1$ . Egyrészt ennél több nem mehet ki  $s$ -ből.

Másrészt ennyi mehet is: legyen  $P$  az olyan csúcsok halmaza, amihez tartozó halmazban az 1 és az  $n$  is benne van,  $Q$  az olyanok, amiben 1 benne van,  $n$  nincs, és az 1-en kívül még valami benne van.  $R$  meg az olyanok, amiben  $n$  benne van, 1 nincs, és az  $n$ -en kívül még valami benne van. Ekkor van  $2^{n-2}$  1 kapacitású  $sPt$  út, és van  $2^{n-2} - 1$  1 kapacitású  $sQRn$  út.

## Házi feladat

1. Irányítsuk a kocka élhálózatának éleit az  $s$  csúcsból az átellenes  $t$  csúcs felé. Hogyan kell kiosztani a 12 él közt 4 db 1-es, 2-es ill. 3-as kapacitást, hogy a kapott hálózatban a maximális folyam nagyság a lehető legnagyobb legyen?
2. A  $(G, s, t, c)$  hálózatban az egyik él,  $e$  kapacitása  $c(e) = x$ . A többi él kapacitása állandó, nem függ  $x$ -től. Legyen  $M(x)$  a maximális folyam nagysága  $x$  függvényében. Tudjuk, hogy  $M(1) = 1$ ,  $M(100) = 10$ . Határozzuk meg  $M(2)$  értékét.