

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2021. március 1.

Euler-kör, Euler-út, Hamilton-kör, Hamilton-út

Tudnivalók:

Euler kör (Euler körséta): olyan körséta, amely minden élt pontosan egyszer tartalmaz. Euler út (Euler séta): olyan séta, amely minden élt pontosan egyszer tartalmaz.

G -ben van Euler kör $\Leftrightarrow G$ izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros.

G -ben van Euler út $\Leftrightarrow G$ izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszám páros, kivéve legfeljebb kettőt.

Hamilton kör: olyan kör, ami minden csúcsot tartalmaz.

Hamilton út: olyan út, ami minden csúcsot tartalmaz.

G -ben van Hamilton kör \Leftrightarrow akárhogyan elhagyunk G -ből k csúcsot, legfeljebb k összefüggő komponensre esik szét.

G -ben van Hamilton út \Leftrightarrow akárhogyan elhagyunk G -ből k csúcsot, legfeljebb $k + 1$ összefüggő komponensre esik szét.

Dirac tétel: Ha minden $d_i \geq n/2 \Rightarrow G$ -ben van Hamilton kör.

Ore tétel: Ha tetszőleges nem szomszédos x, y csúcsokra $d(x) + d(y) \geq n \Rightarrow G$ -ben van Hamilton kör.

Pósa tétel: Legyen $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ és minden $k < n/2$ -re $d_k \geq k + 1 \Rightarrow G$ -ben van Hamilton kör.

Chvátal tétel: Legyen $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ és minden $k < n/2$ -re $d_k \geq k + 1$, vagy $d_{n-k} \geq n - k \Rightarrow G$ -ben van Hamilton kör.

Dirac feltétel \Rightarrow Ore feltétel \Rightarrow Pósa feltétel \Rightarrow Chvátal feltétel. Tehát a Dirac, Ore, Pósa, Chvátal tételek, ebben a sorrendben, egyre erősebbek.

Chvátal tétel a lehető legerősebb tétel, kizárólag a fokszámok alapján. Pontosabban: ha $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ megsérti a Chvátal feltételt, akkor van olyan G gráf, amelyben nincs Hamilton kör és a $d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_n$ fokszám sorozatára, minden i -re $d'_i \geq d_i$.

1. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal kiparkettáztunk. Minden kis téglalapnak legalább az egyik oldala egész hosszúságú. Igazoljuk, hogy a nagy téglalapnak is van egész hosszúságú oldala. (*)

Megoldás: 1. Legyenek a G gráf csúcsai a téglalapok sarkai. Minden egyes kis téglalapnak kössük össze egy-egy éllel az egész oldalak végein levő csúcsokat. (Ha egy téglalapnak minden oldala egész, akkor az egyik párt felejtsük el.) Így egy multigráfot kapunk, amelyben a nagy téglalap négy sarkának a foka 1, a belső csúcsoknak meg 2 vagy 4. Induljunk el mondjuk a jobb alsó csúcsból, menjünk, amíg el nem akadunk. Csak egy másik külső csúcson akadhatunk el, mondjuk legyen ez a jobb felső. Ezen az úton mindig egész hosszúságút léptünk, ezért a nagy téglalap függőleges oldala egész.

2. Vegyünk egy tengelypárhuzamos, $1/2$ oldalú végtelen négyzetrácsot és színezzük ki sakktábla szerűen. Nem nehéz belátni a következő érdekes tulajdonságot: Legyen T egy tetszőleges, tengelypárhuzamos téglalap. Nem nehéz belátni a következő érdekes tulajdonságot. T minden eltoltja ugyanakkora területű fehér és fekete részt tartalmaz $\Leftrightarrow T$ valamelyik oldala egész. Ebből könnyen következik a feladat: mivel a kis téglalapoknak egy-egy oldala egész, minden eltoltjuk ugyanakkora területű fehér és fekete részt tartalmaz. De akkor az uniójuk, vagyis a nagy téglalap is. Akkor viszont ennek is valamelyik oldala egész.

2. Igazoljuk, hogy ha a G gráf minden fokszáma páros, akkor $E(G)$ előáll éldiszjunkt körök uniójaként.

Megoldás: Indukció az élek számára. Ha 0 db él van, akkor nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $e > 0$ élünk van, és kevesebb élű gráfra már beláttuk az állítást. Induljunk el egy pontból, és lépkedjünk. Mivel minden fok páros, ahova bementünk, onnan tovább is tudunk menni. Tehát egyszer csak olyan pontba jutunk, ahol már jártunk: találtunk egy körsétát! Na de nem ez kell nekünk, hanem vegyük G összes körsétája közül a legrövidebbet: ez egy kör lesz. Tehát beláttuk, hogy ha minden fok páros, akkor van a gráfban kör. Hagyjuk el ezt a kört, a megmaradt gráfban is minden fok páros az indukciós feltevés szerint az élek

előállnak éldiszjunkt körök uniójaként, plusz az elhagyott kör, tehát G élei is előállnak éldiszjunkt körök uniójaként.

3. Igazoljuk, hogy ha G összefüggő és minden fokszáma páros, akkor G -ből elhagyhatók G egy körének élei úgy, hogy a kapott gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő maradjon.

Megoldás: Azt mindenesetre tudjuk, hogy G -nek van Euler köre. Kovessük ezt az Euler kört egy v csúcsból az első olyan u pontig, ami korábban már szerepelt. Az u két előfordulása közti rész egy kör (hiszen ezen egy csúcs csak egyszer lehet) és ha ezt elhagyjuk, a maradéknak is van Euler köre: az u egyik előfordulásától rogtán a másikhoz ugrunk. Tehát a maradék gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy *irányított* gráfnak (amelynek nincs izolált pontja) akkor és csak akkor van irányított Euler köre, ha minden pont be-foka egyenlő a ki-fokával, és gráf, mint irányítatlan gráf, összefüggő.

Megoldás: Pontosan ugyanúgy kell, mint az irányítatlan esetben: 1. van benne körséta. 2. Vegyük a leghosszabb körsétát, ebből semmi sem maradhat ki.

5. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler köre?

Megoldás: Az nyilvánvaló, hogy a G_n gráf összefüggő, hiszen egy-egy hely megváltoztatásával bárhova el lehet jutni. Minden csúcs foka n , hiszen n helyen lehet változtatni. Tehát van Euler kör akkor és csak akkor, ha n páros.

6. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G csúcsainak bármely részalmazából páros sok él indul a komplementerébe.

Megoldás: Egy Euler körön végighaladva ugyanannyiszor lépünk ki a komponensből, mint be.

7. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \dots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G -ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler kört, illetve Euler utat?

Megoldás: Az világos, hogy összefüggő. Nézzük a foksámokat: $2, 3, 4, 4, \dots, 4, 4, 3, 2$, két páratlan, tehát Euler kör nincs, Euler út van.

8. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G élgráfjának, $L(G)$ -nek is van Euler köre!

(A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$ -beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G -beli éleknek van közös végpontjuk.)

Megoldás: Ha G összefüggő akkor $L(G)$ is az. Ha $e = uv$ egy él G ben, akkor e , mint csúcs, foka $L(G)$ -ben $d(u) + d(v) - 2$, ami páros, ha $d(u)$ és $d(v)$ is az.

9. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?

Megoldás: Egy 3 hosszú kör és egy 4 hosszú kör, egy közös csúccsal.

10. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, és pedig mindkét irányban egyszer-egyszer.

Megoldás: Cseréljük ki minden élt két irányított élre, mindkét irányban egyre. Egy korábbi feladat alapján ebben van irányított Euler kör, ami pont megfelel nekünk.

11. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G -ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G -ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?

Megoldás: Nem következik, pl vegyünk két kört egy közös csúccsal. A két él pedig legyen az egyik körben közös pontra illeszkedő két él.

12. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)

Megoldás: A sima körök ilyenek. Más meg nem lehet: ha van egy v 4-fokú pont, akkor az Euler kör két részre bontható: v -től v -ig, majd megint v -től v -ig. Ebből az egyik résznek megfordíthatjuk a bejárási irányát. Ha v foka nem 4 hanem több, akkor is ugyanígy járhatunk el.

13. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

- (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G -nek is van.
- (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G -nek is van.
- (c) Ha G -ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
- (d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G -ben is van.

Megoldás: (a) Hamis: vegyünk két diszjunkt kört.

(b) Igaz: Ha G -nek nincs éle, akkor triviális. Egyebként G' bejárását kiegészíthetjük G bejárásával. Az összefüggőség miatt az elvett körnek van olyan csúcsa, ami G' -nek nem izolált pontja.

(c) Hamis: Vegyünk három kört, A, B, C , úgy, hogy A -nak és B -nek is van egy közös csúcsa, és C -nek és B -nek is, de ezek különbözőek. Ekkor B -t elhagyva a gráf nem lesz izolált pontoktól eltekintve összefüggő.

(d) Igaz: G összefüggő és legfeljebb 2 páratlan fokú pontja van.

14. (a) Bejárható-e a 4×4 -es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2 -es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8 -as), (c) 3×5 -ös, (d) 3×6 -os sakktábla esetén?

Megoldás: 4×4 : Nem. Tekintsük a G 16 csúcsú gráfot, amelynek a csúcsai a mezőknek, az élei a lólépéseknek felelnek meg. A kérdés, hogy ennek a gráfnak van-e Hamilton köre illetve Hamilton útja. Hagyjuk el a középen levő 4 mezőt (illetve az ezeknek megfelelő csúcsokat). Ezzel G 6 komponensre esett szét, vagyis nincs neki Hamilton útja se.

8×8 : Igen, viszonylag könnyű megtalálni.

3×5 : Nem. Hagyjuk el a középső mezőt és ennek négy átlós szomszédját. 7 komponens lett, se kör, se út.

3×6 : Nem. Hagyjuk el a középső 6 mezőt. 8 komponens lett, se kör, se út.

15. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetőek úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.

Megoldás: Mivel a foksámösszeg páros, ennek a gráfnak páros sok csúcsa van. Színezzük ki a (páros sok élből álló) Hamilton-kör éleit felváltva két színnel, a többi él legyen a harmadik színű. Minden csúcsban a 3 él mind különböző színű.

16. (a) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfból bárhogy elhagyunk k csúcsot, legfeljebb k komponensre esik szét! (b) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfnak nincs Hamilton köre!

Megoldás: (a) A Petersen gráf egy külső 5 hosszú kör és egy belső, trükkösen összekötve 5 éllel. Tegyük fel, hogy a pontot vettünk el a külső körből, b pontot a belsőből, $a + b = k$. Ha $a = 0$, akkor a külső kör összetartja a megmaradt pontokat. Hasonlóan, ha $b = 0$. Ha $a, b > 0$, akkor a külső kör max a komponensre esett szét, a belső max b komponensre, vagyis összesen max $a + b + k$ -ra.

(b) Ha lenne Hamilton köre, akkor, az előző feladat alapján, ki lehetne színezni az éleket 3 színnel úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk. Ekkor a külső 5 hosszú kör lényegében (szimmetriákat figyelembe véve) csak egyféleképpen színezhető: 1, 2, 1, 2, 3. Innen már egyértelmű a többi él színe és ellentmondásra vezet.

17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ -pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G -nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.

Megoldás: Hamilton-kör minden második éle.

18. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G -nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.

Megoldás: 1. Ha csak $n - 1$ pontot választunk ki, akkor egy ezeken kívüli pontnak lesz egy ezeken kívüli szomszédja, és ez az él nem lesz lefogyva.

2. Dirac tétel miatt van Hamilton kör. Ennek legalább minden második csúcsát ki kell választani.

19. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

Megoldás: Belátjuk, hogy teljesül az Ore feltétel az ismerettség gráfra. Tegyük fel, hogy x és y nem ismeri egymást. Írjuk fel az ismerőseiknek a listáját. A feltétel szerint a listán szerepel az összes többi, $n-2$ ember. Sőt! Legalább két ember kétszer is szerepel! Tehát $d(x) + d(y) \geq n$, teljesül az Ore feltétel, van Hamilton kör, eszerint ültetjük le őket.

20. A G egyszerű gráfnak $2n+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van Hamilton-út!

Megoldás: Vegyünk fel egy extra pontot, amit minden más csúccsal összekötünk. Ennek a G' gráfnak $2n+2$ csúcsa van és minden csúcsának legalább $n+1$ a foka. Tehát van Hamilton köre. Ebből elvéve az extra csúcsot, G Hamilton útját kapjuk.

21. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n=4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Hamilton-köre?

Megoldás: Ez az n dimenziós kocka élhálójá. Indukcióval látható, hogy $n \geq 2$ -re van Hamilton kör.

22. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \dots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?

Megoldás: Igen, kört: kettesével megyünk előre, kettesével vissza, a vegeken ügyesen megfordulunk.

23. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G-v$ ill. a $G-e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

Megoldás: Persze. Magára a Hamilton körre is igaz, plane ha más élek is vannak.

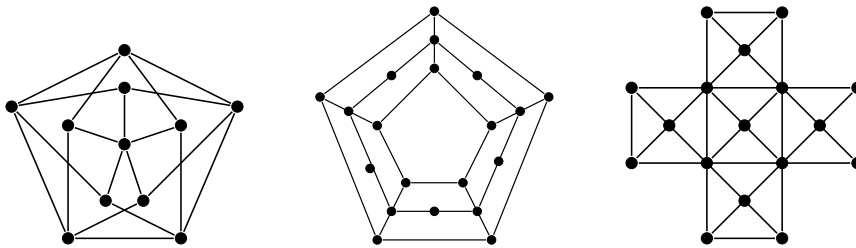
24. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
 (a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
 (b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;
 (c) G_n a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfot jelöli és $n \geq 2$.

Megoldás: (a) $(n-1)!/2$

(b) $(n-1)!/2 - (n-2)!$

(c) $n!(n-1)!/2$

25. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?



Megoldás:

- (a) Van benne egy ronda Hamilton-kör.
 (b) A középső kör 5 csomópontját elhagyva 7 komponenst kapunk, se kör, se út.
 (c) Út konnyú, kör nincs, a középső négyzet négy csúcsát elhagyva 5 komponens.

26. Legalább hány éle van egy olyan hat (n) pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

Megoldás: 6.

27. Legfeljebb hány éle lehet egy hat (n) csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?

Megoldás: 11. K_5 plusz egy él a hatodik csúcsba. Ha 12 éle van: Ore feltétel teljesül, van Hamilton kör.

28. Legyen G egy n csúcsú gráf. Ha találunk két nem szomszédos u, v csúcsot, amelyekre $d(u) + d(v) \geq n$, akkor húzzuk be az uv élet. Ismételjük az eljárást, amíg el nem akadunk.

Előfordulhat, hogy ezt az eljárást többféleképpen is végrehajthatjuk, mert egy lépésben több lehetséges él közül is választhatunk.

(a) Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is hajtjuk végre az eljárást, az eredményként kapott gráf mindig ugyanaz. (Ezt nevezzük G lezártjának.)

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha G lezártjában van Hamilton kör, akkor G -ben is!

Megoldás: (a) Vegyük a következő módosított eljárást: Vegyük G -ben az ÖSSZES olyan uv pontpárt, amik nincsenek összekötve és $d(u) + d(v) \geq n$, és EGYSZERRE húzzuk be az összeset, majd ismételjük. Be lehet látni, hogy az így kapott gráf se több, se kevesebb, mint az eredeti eljárással kapott.

(b) Ha akkor keletkezett Hamilton kör, amikor u -t és v -t összekötöttük, akkor volt köztük Hamilton út. Mivel $d(u) + d(v) \geq n$, van az úton egy u -szomszéd, ami előtt egy v -szomszéd van, máris megvan az Ore bizonyításból jól ismert 8-as alakú Hamilton kör, ellentmondás.

29. a. Mutassunk olyan gráfot, amelyre nem teljesül a Chvátal feltétel, de mégis van Hamilton köre.

b. Mutassunk olyan számsorozatot, amelyre teljesül a Chvátal feltétel, de nincs olyan gráf, amelynek a fokszámsorozata.

Megoldás: a. Pl maga a Hamilton kör. Minden $d_i = 2$. b. Nagyon sok lehetőség van. Pl egy olyan sorozat, amelyre teljesül a Chvátal feltétel, de az összegük páratlan. Vagy az egyik legalább n .

Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris feszítő részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig 1-reguláris feszítő részgráfja?

(Egy gráfot k -regulárisnak nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k . Egy részgráfot *feszítő részgráfnak* nevezünk, ha az eredeti gráf összes pontját tartalmazza.)

2. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G -nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G -nek.