

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

3. gyakorlat, 2021. február 22.

Minimális súlyú feszítőfa, Kruskal tétel, mohó algoritmus

1. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.
2. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)
3. Adjunk meg tetszőleges k -hoz k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.
4. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G -ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G -ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
5. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a v_1, v_2, \dots, v_n pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfájának számát.
6. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt pontthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két pontthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
7. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.
8. Ha egy súlyozott élű gráfban vannak egyforma súlyú élek, akkor elképzelhető, hogy a mohó algoritmus többféleképpen is lefuthat. Bizonyítsuk be, hogy *minden* minimális összsúlyú feszítőfa megkapható a mohó algoritmus megfelelő futtatásával.

Házi feladat

1. Egy n csúcsú teljes gráf minden élének más a súlya. Bizonyítsuk be, hogy csak egy minimális összsúlyú feszítőfája van.
2. Hogyan súlyozzuk egy n csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy a súlyok összege 1, és a minimális feszítőfa súlya a lehető legnagyobb?
Mennyi az így kapott minimális feszítőfa súlya?