

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

2. gyakorlat, 2021. február 15.

## Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Prüfer-kód

### Tudnivalók:

Gráf, izomorfia, részgráf definíciója.

Egy  $G$  gráf csúcsai  $v_1, \dots, v_n$ , fokszámok:  $d_1, \dots, d_n$ . Ekkor  $\sum_{i=1}^n d_i = 2e$ , ahol  $e$  az élek száma.

Élsorozat:  $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m}$ , ahol minden  $j$ -re  $v_{i_j} v_{i_{j+1}}$   $G$  éle. Séta: élsorozat, amiben minden él max egyszer szerepelhet. Út: élsorozat, amiben minden csúcs max egyszer szerepelhet.

Zárt élsorozat:  $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m}$  élsorozat, ahol  $v_{i_1} = v_{i_m}$ . Körséta: séta, amelyben  $v_{i_1} = v_{i_m}$ . Kör: út, amelyben  $v_{i_1} = v_{i_m}$ .

$G$  összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út  $\Leftrightarrow$  bármely két csúcsa között vezet séta  $\Leftrightarrow$  bármely két csúcsa között vezet élsorozat. (pl legrövidebb ilyen élsorozat egy út)

$G$  összefüggő és van benne kör: elhagyható egy él úgy, hogy összefüggő marad.  $G$  körmentes és nem összefüggő: hozzávehető egy él úgy, hogy körmentes marad.

Fa: olyan gráf, ami összefüggő és körmentes.

Minden összefüggő gráf tartalmaz fát. Minden körmentes gráf kibővíthető fává. Minden fában van legalább két levél (1-fokú csúcs). Minden  $n$  csúcsú fának  $n - 1$  éle van.

Fa: összefüggő és körmentes  $\Leftrightarrow$  összefüggő és  $n - 1$  éle van  $\Leftrightarrow$  körmentes és  $n - 1$  éle van.

Cayley tétel:  $n$  számozott ponton  $n^{n-2}$  különböző fa van. Bizonyítás: Legyenek a csúcsok  $1, 2, \dots, n$ . Fa  $\Leftrightarrow n - 2$  hosszú kód, minden eleme  $1, \dots, n$  (Prüfer kód).

Fa  $\Rightarrow$  Prüfer kód:  $w_1$ : legkisebb sorszámú levél, elhagyjuk, szomszédját felírjuk:  $v_1$ , ezt ismétljük:  $v_1 v_2 \dots v_{n-1}$ , ez a kibővített Prüfer kód.  $v_{n-1}$  mindig  $n$ . Ezt elhagyva:  $v_1 v_2 \dots v_{n-2}$ , a Prüfer kód.

Megfigyelés: Prüfer kódban  $v_i$   $d(v_i) - 1$ -szer szerepel. Speciálisan  $v_i$  levél akkor és csak akkor, ha nem szerepel.

Prüfer kód  $\Rightarrow$  fa:  $v_1 v_2 \dots v_{n-2}$  Prüfer kód, legyen  $v_{n-1} = n$ , kibővített Prüfer kód:  $v_1 v_2 \dots v_{n-2} n$ . Megkeressük az elhagyott csúcsokat,  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ -et. Amikor  $v_i$ -t felírtuk,  $w_i$ -t hagytuk el. Rekurzívan,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ -re:  $w_i$  a legkisebb index, ami nem szerepel a  $w_1 w_2 \dots w_{i-1} v_i v_{i+1} \dots v_{n-1}$ -ben. A kapott gráf élei:  $v_i w_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Ez egy fa lesz, aminek  $v_1 v_2 \dots v_{n-2}$  a Prüfer kódja.

1. Rajzoljunk olyan egyszerű gráfokat, amiknek rendre 6, 7, 8, 9 csúcsa van és minden csúcs foka 3.

*Megoldás:* 6: hat hosszú kör, három átlóval. 8: nyolc hosszú kör, négy átlóval. 7, 9: nincs ilyen, mert a fokok összege páratlan.

2. Határozzuk meg az összes olyan, lényegesen különböző egyszerű gráfot, melyekre rendre  $v = 4, e = 5$ , ill.  $v = 5, e = 3$ , ill.  $v = 5, e = 7$ , ill.  $v = 5, e = 8$ , teljesül, ahol  $v$  jelöli a pontok számát,  $e$  pedig az élek számát!

*Megoldás:*  $v = 4, e = 5$ : ez egy teljes gráf minusz egy él. Egy (féle) ilyen van.  $v = 5, e = 3$ : végig kell nézni az eseteket, legyenek a csúcsok  $1, 2, \dots, 5$ , három megoldás van. 1: 12, 13, 14, 2: 12, 23, 34, 3: 12, 23, 45.  $v = 5, e = 7$ : Ugyanaz, mint az előző, a komplementere 3 élű.  $v = 5, e = 8$ : Nezzük inkább a komplementert, ami két élű. Két megoldás: 12, 23 és 12, 34.

3. Hány 50 csúcsú, 1223 élű, lényegesen különböző (páronként nem izomorf) egyszerű gráf létezik?

*Megoldás:* Mivel  $\binom{50}{2} = 1225$ , ezért ez egy teljes gráf, minusz két él. Vagyis két lehetőség van, a két hiányzó élnek van közös csúcsa, illetve nincs.

4. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre 1, 2, 2, 3, 3, 3 ill. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 ill. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 ill. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.

*Megoldás:* 1, 2, 2, 3, 3, 3: Ilyen van, pl ha a csúcsok az 1, 2, 3, 4, 5, 6, akkor az élek: 12, 13, 34, 42, 45, 35, 56. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4: mivel a fokszámösszeg páratlan, nincs ilyen. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7: ez egy 7 csúcsú gráf lenne, de akkor nem lehet egy csúcs foka 7, tehát nincs ilyen. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6: Mivel 7 csúcs van és két 6-fokú van, nem lehet 1-fokú. Tehát nincs ilyen.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  tetszőleges egyszerű gráf, akkor a  $G$  vagy  $\bar{G}$  gráfok valamelyike összefüggő!

*Megoldás:* Ha  $G$  nem összefüggő, akkor legalább két összefüggő komponense van. Ekkor viszont a komponensek közti összes él benne van  $G$ -ben. Ekkor viszont  $\bar{G}$  összefüggő, ha  $u$  és  $v$  különböző komponensben vannak, akkor össze vannak kötve, ha ugyanabban a komponensben, akkor meg egy másik komponens tetszőleges csúcsán keresztül el lehet jutni  $u$ -ból  $v$ -be.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges  $n$  pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan  $(n-3)$ -mal egyenlő!

*Megoldás:* Tegyük fel, hogy pontosan  $n-3$  másodfokú pont van. Ezenkívül van két levél. Már csak egy csúcs,  $x$  foka kérdéses. Egy fában a fokszámok összege  $2n-2$ , itt az  $x$ -en kívüli fokok összege  $2n-6+2=2n-4$ , tehát  $x$  foka is 2, ellentmondás!

7. Az előre megszámozott (címkézett)  $n$  darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?

*Megoldás:*  $2^{\binom{n}{2}}$

8. Igazoljuk, hogy ha  $G$  véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.

*Megoldás:* Mivel a fokszámösszeg páros, az első állítás nyilvánvaló. Második: Egyik irányban végtelen út. Legyenek a csúcsok a pozitív egészek, minden  $i$ -t kössünk  $i+1$ -gyel. 1 foka 1, minden más csúcsé 2.

9. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?

*Megoldás:* Valamivel kösszebb a komplementer gráfokat vizsgálni (megtehetjük, mert két gráf akkor és csak akkor izomorf, ha a komplementereik). Itt a fokszámok: 3, 3, 2, 2, 2, 2. Ha végigbütyköljük, 4 lehetőség van. Legyenek a csúcsok 1, 2, 3, 4, 5, 6. A négy lehetőség élei: 1: 12, 13, 34, 42, 15, 56, 62. 2: 12, 13, 34, 45, 52, 16, 62. 3: 13, 32, 14, 42, 15, 56, 62. 4: 12, 14, 43, 31, 25, 56, 62.

10. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  egyszerű gráf, akkor élei irányíthatóak úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.

*Megoldás:* Sorszámazzuk meg tetszőlegesen a csúcsokat és minden élt irányítsunk a nagyobb sorszámú vége felé.

11. Igazoljuk a következő állítást. Ha  $T_1$  és  $T_2$  két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és  $e_1$   $T_1$  éle, akkor létezik  $T_2$ -nek egy  $e_2$  éle, hogy  $T_1 - e_1 + e_2$  és  $T_2 - e_2 + e_1$  is fa.

*Megoldás:* Ha  $e_1 \in T_2$ , akkor nem túl nehéz, legyen  $e_2 = e_1$ . A kicseréléssel nem csináltunk semmit, vagyis  $T_1 - e_1 + e_2 = T_1$ ,  $T_2 - e_2 + e_1 = T_2$ . Tehát tegyük fel, hogy  $e_1 \notin T_2$ . Ekkor  $T_2 + e_1$ -ben van egy  $C$  kör. Ennek tetszőleges  $e'$  élét elhagyva,  $T_2 + e_1 - e'$  ismét fa. Tekintsük a  $T_1 - e_1$  gráfot, ennek két komponense van,  $K_1$  és  $K_2$ . Ezek között fut  $e_1 \in C$ , tehát, van  $C_n$ -nek (legalább) egy másik éle,  $e_2$ , ami  $K_1$  és  $K_2$  között fut. Na, ezt cseréljük ki  $e_1$ -gyel! Ekkor  $T_1 - e_1 + e_2$  hiszen újra összekötöttük a  $K_1$  és  $K_2$  komponenseket, és  $T_2 - e_2 + e_1$  is fa, hiszem megszüntettük a  $C$  kört.

12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?

*Megoldás:* Ha minden pont harmadfokú, akkor (mivel a fokszámok összege páros) a gráfnak páros sok csúcsa van. Ha 4 csúcsa van, akkor a  $K_4$  teljes gráfot kapjuk, de abban van 3 hosszú kör, nem jó. 6 csúcs viszont elég, például a  $K_{3,3}$  teljes páros gráf.

13. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!

*Megoldás:* 5 csúcsra:  $C_5$ , 5 hosszú kör. 6 csúcsú nincs, mert a teljes 6 csúcsú gráfnak  $\binom{6}{2} = 15$  éle van, ami páratlan.

14. Hány pontja van annak a  $T$  fának, melyre  $|E(\bar{T})| = 15 \cdot |E(T)|$ ?

*Megoldás:*  $\binom{n}{2} - (n-1) = 15(n-1)$ , ebből  $n = 1$  vagy  $n = 60$ .

15. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másiktól egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  akkor a másik a  $(b_2, b_3, b_4, b_1)$  sorozathoz tartozó pont.

*Megoldás:* 2 db hurokél, 0000 1111, 3 db 4 hosszú kör, 0001 – 0010 – 0100 – 1000, 0011 – 0110 – 1100 – 1001, 0111 – 1110 – 1101 – 1011, és két párhuzamos él 0101 és 1010 között.

16. Igazoljuk, hogy ha egy  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  sorozat egy egyszerű gráf fokszám listája, akkor teljesül rá a következő feltétel:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(Igazából az állítás megfordítása is igaz: ha a fenti feltétel teljesül egy számsorozatra, akkor van hozzá olyan egyszerű gráf, melynek az adott számsorozat a fokszám listája.)

*Megoldás:* Vegyük a  $k$  legnagyobb fokú csúcsot. Belőlük összesen  $\sum_{i=1}^k d_i$  él indul (most minden élt mindkét vége felől számolunk). Ezek közül  $k(k-1)$  lehet belső él, a többi a többi csúcsba érkezik. De egy külső,  $d_i$  fokú csúcs legfeljebb  $\min(d_i, k)$  élt tud fogadni.

17. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.

*Megoldás:* A fokszámok  $0, 1, \dots, n-1$  lehetnek, de nem lehet egyszerre 0 és  $n-1$  fokú csúcs, ezért csak  $n-1$ -féle fokszám lehet egy véges egyszerű gráfban.

18. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges  $G$  gráfra fennáll, hogy  $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$ , ahol  $c(G)$  a  $G$  gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.

*Megoldás:* Legyen a komponensek csúcsainak a száma  $n_1, \dots, n_c$ . Az  $i$ -edik komponensnek legalább  $n_i - 1$ -ele van, hiszen összefüggő. Tehát összesen legalább  $\sum_{i=1}^c (n_i - 1) = |V(G)| - c(G)$  él van.

19. Mi lehet a  $G$  gráf, ha  $\Delta(G) \leq 2$ ? ( $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát jelöli.)

*Megoldás:* Utak és körök uniója.

20. Egy  $3 \times 3$  méretű sakktábla négy sarkába két világos és két sötét huszárt állítunk úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes sarokban álljanak. Elérhető-e ebből az állapotból a szokásos lépéseket végezve, hogy a tábla négy sarkában álljanak a huszárok, de az átellenesek különböző színűek legyenek? (Közben sosem állhat egy mezőn egynél több figura.)

*Megoldás:* Nem. Készítsük el a lólépés gráfot, aminek a csúcsai a mezőknek felelnek meg, két mező pedig pontosan akkor van összekötve, ha lólépésre vannak. Ebben a középső mezőnek megfelelő csúcs izolált pont, a többi egy 8 hosszú kört alkot. Ezen felváltva vannak a fehér és fekete lovak, nem tudnak helyet cserélni, pedig itt az kéne.

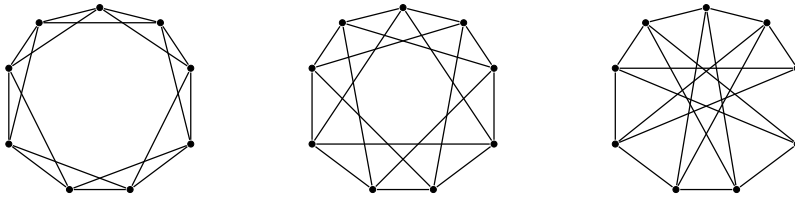
21. Mutassuk meg, hogy ha egy  $n$  csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely  $n$  csúcsú fa, és minden éle azonos színű.

*Megoldás:* Azt már tudjuk, hogy egy gráf vagy a komplementere összefüggő. Tehát vagy a piros, vagy a kék élek összefüggő gráfot alkotnak, ennek meg mindig van feszítőfája.

22. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélek. Mi lehet ez a két szám?

*Megoldás:* Minden fának van levele, tehát az egyik fokszám az 1. Mondjuk  $y$  darab 1 fokú van és  $8 - y$  darab  $x$  fokú,  $2 \leq x \leq 7$ . Végigszaladva ezen a 6 lehetőségen:  $x = 2, y = 2$ ;  $x = 3, y = 5$ ;  $x = 4, y = 6$ ;  $x = 7, y = 7$ ; ilyenek vannak is.

23. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?

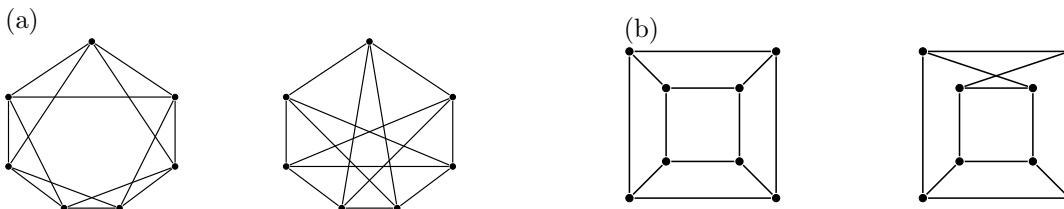


*Megoldás:* A két szélső igen. Mindkettő egy 8 hosszú kör, a 2 hosszú átlókkal. De a közepso nem. Pl nem minden éle van benne háromszögben, a másik kettőnek igen. Vagy csak három háromszög van benne, a másik kettőben több.

24. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyszerű gráf, amelynek pontosan két különböző feszítőfája van.

*Megoldás:* Ha nincs benne kör, akkor max egy feszítőfája van. Ha van benne kör, akkor viszont az legalább 3 hosszú, és ennek bármelyik élét elhagyhatjuk, a többit megtartjuk, és kiegészítjük feszítőfává. Ez legalább 3 különböző feszítőfa.

25. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?



*Megoldás:* (a): igen, mindkettő  $C_7$  komplementere. (b): nem, a másodikban van  $C_5$ , az elsőben egyáltalán nincs páratlan hosszú kör.

26. Egy fa Prüfer kódja  $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$ . Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?

*Megoldás:*  $w_1 = 7$ , a legkisebb szám, ami nem szerepel a sorozatban. A kód 8 hosszú, tehát  $n = 10$ . A kibővített Prüfer kód:  $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 10)$ . Erre alkalmazva a fenti eljárást, az élek: 37, 13, 48, 14, 51, 95, 29, 62, 106.

27. Bizonyítsuk be, hogy ha  $F$  fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az  $F$ -beli csúcsok maximális fokszáma.

*Megoldás:* Egy maximális fokú csúcsból kiinduló maximális utak másik végei levelek, különben tovább mehetnénk. Vagy Prüferrel: a Prüfer kód  $n - 2$  hosszú, a  $v$  csúcs  $d - 1$ -szer van benne, a maradék  $n - d - 1$  hosszú kódból legalább  $d$  másik csúcs hiányzik.

28. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább  $\frac{2}{3}$  része levél.

*Megoldás:* Fokszámok összege  $2n - 2$ . Ha  $l$  darab levél van, akkor a többi csúcs foka legalább 4.  $2n - 2 = \sum d_i \geq l + 4(n - l) = 4n - 3l$ . Ebből  $3l - 2 \geq 2n, l > 2n/3$ .

29. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10),

(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1),

(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)

ill. (5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)?

*Megoldás:* Standard módszerrel,  $11 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 12$ ,

$11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 12$ ,

$1 - 7, 2 - 8, 1 - 2, 3 - 9, 1 - 3, 4 - 10, 1 - 4, 5 - 11, 1 - 5, 6 - 1, 12 - 6.$

$5 - 1, 4 - 3, 8 - 4, 2 - 5, 2 - 6, 2 - 7, 8 - 2, 9 - 8.$

30. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?

*Megoldás:* Csupa különböző:  $n - 2$  csúcs foka 2, 2 csúcsé 1, út. Csupa azonos: 1 fok  $n - 1$ , a többi 1, csillag.

31. Hány olyan fa adható meg  $n$  címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)

*Megoldás:* Ez egy dupla csillag. Vagyis két szomszédos csúcs,  $u, v$ , és minden más csúcs  $u$  és  $v$  közül valamelyikhez van bekötve. De legalább egy  $u$ -hoz és legalább egy  $v$ -hez. Ilyen  $\binom{n}{2}(2^{n-2} - 2)$  van.

32. Hány olyan fa adható meg  $n$  címkézett ponton, melynek az  $n$  pont levele?

*Megoldás:* Vagyis  $n$  nem szerepel a Prüfer-kódban,  $(n - 1)^{n-2}$ .

33. A  $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$  (számozott) pontokon hány olyan egyszerű  $G$  gráf adható meg, melynek  $2n - 2$  éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?

*Megoldás:* Ez két diszjunkt  $n$  csúcsú fa:  $\binom{2n}{n}n^{n-2}n^{n-2}/2$ .

34. Hány különböző olyan fa adható meg az  $1, 2, \dots, 8$  címkézett csúcsokon, ami az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$  élek közül legalább az egyiket nem tartalmazza?

*Megoldás:* Inkább vonjuk ki az összesből ( $8^6$ ) azokat, amik  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$  éleket tartamaznak. Azok a fák, amik az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$  éleket tartamaznak, ezen élek összehúzásával megfelelnek egy fának az  $12, 34, 56, 78$  csúcsokon. Ilyen fa  $4^2$  van, de mind a 3 él négyféle eredeti élből származhat, tehát a válasz:  $8^6 - 4^2 \cdot 4^3$ .

35. Legyen  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $d_1, d_2, \dots, d_n$  egy ( $n$  csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2$ .

*Megoldás:* Nyilván szükséges a feltétel, elégségesség: 1. Indukcióval:  $d_n = 1$  mert az összeg  $2n - 2$ , kössük össze a  $d_1$ -es fokúval, új fokszámsorozat  $n - 1$  csúcson, indukció. 2. Írjunk föl egy olyan Prüfer kódot, amiben az  $i$   $d_i$ -1-szer szerepel, ez éppen  $n - 2$  hosszú lesz, az ennek megfelelő fa pont jó.

36. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.

*Megoldás:* Vegyünk két leghosszabb utat. Ha diszjunktak, mivel a fa összefüggő, van egy mindkettőtől éldiszjunkt út az egyik valamelyik pontjától a másik valamelyik pontjáig. Ez, plusz a két út nagyobbik fele, hosszabb út lenne.

37. Bizonyítsuk be, hogy egy fában az összes leghosszabb útnak van közös csúcsa. (\*)

*Megoldás:* Egy konkrét leghosszabb utat minden más leghosszabb út egy intervallumban (rész-útban) metsz, és mivel bármely két út metszi egymást, bármely két intervallum is metszi egymást, különben lenne a fában kör. Akkor viszont az összes intervallum metszi egymást. (Vegyük a legkésőbb kezdődő és a legkorábban végződő intervallumot, ezek metszetét minden tartalmazza.)

### Házi feladatok

1. Adjuk meg az összes, legalább két csúcsú önkomplementer fát, vagyis az összes olyan legalább két csúcsú fát, ami izomorf a komplementerével!
2. Hány olyan fa van a  $v_1, v_2, \dots, v_n$  csúcsokon, amelynek  $v_{n-1}v_n$  éle?