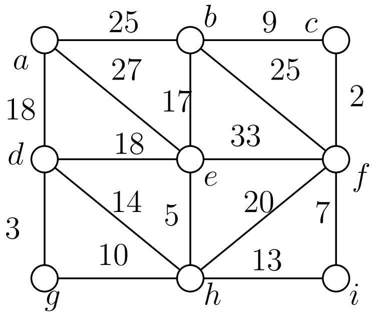
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

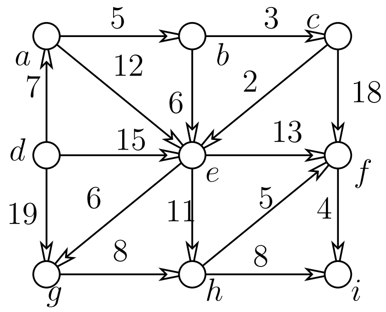
13. gyakorlat, 2021. május 10-11.

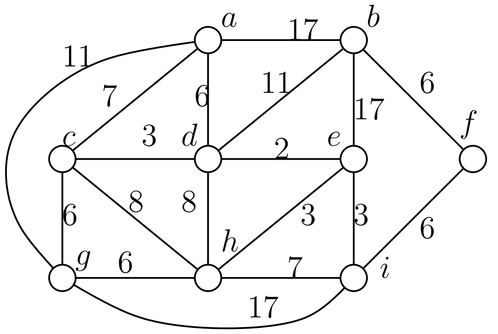
Legrövidebb utak, BFS, DFS, Dijkstra, Ford, Floyd, PERT

Def: Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfüggvény. Az $uv \in E$ él *hossza* alatt az $l(uv)$-t értjük. A G egy P útjának a *hossza* a P éleinek összhossza. Az $u, v \in V$ pontok *távolságát* $dist_l(u, v)$ jelöli, melyre $dist_l(u, v) = \ell$, ha létezik ℓ hosszúságú uv út G-ben, de ℓ-nél rövidebb nincs. (Ha nincs uv-út G-ben, akkor $dist_l(u, v) = \infty$. Ha nem adjuk meg az l távolságfüggvényt, akkor az $l \equiv 1$ függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

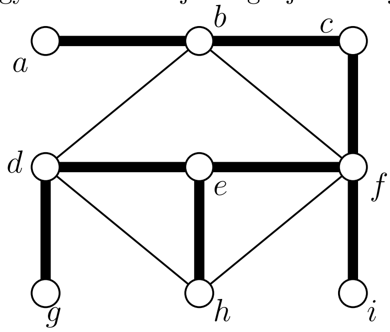
1. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény. Tegyük fel, hogy egy u-ból v-be vezető élsorozat éleinek összhossza ℓ. Igazoljuk, hogy $dist_l(u, v) \leq \ell$.
2. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény, valamint egy $r \in V$ gyökérpont. Tegyük fel, hogy $d(r) = 0$, továbbá $d(v) \geq dist_l(r, v)$ teljesül minden $r \neq v \in V$ esetén. Ha valamely $uv \in E$ esetén $d(v) > d(u) + l(u, v)$, akkor végrehajtható az uv *élmenti javítás*, amikoris $d(v)$ értékét $d(u) + l(u, v)$-re csökkentjük.
   - Igazoljuk, hogy a fenti élmenti javítás után kapott d függvényre $d(v) \geq dist_l(r, v)$ teljesül.
   - Mutassuk meg, hogy ha $d(v) = dist_l(r, v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra, akkor nem végezhető élmenti javítás.
   - Bizonyítsuk be, hogy ha nem végezhető élmenti javítás, akkor $d(v) = dist_l(r, v)$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.
   - Igazak-e a fentiek akkor, ha a távolságfüggvény negatív értékeket is felvehet? Miért?
   - Mi a helyzet akkor, ha a $dist_l(u, v)$ definíciójában legrövidebb út helyett legrövidebb élsorozattal dolgozunk?
3. Hogyan lehet zsineggel, vonalzóval és csavaralátétekkel nemnegatív élhosszok mellett irányítatlan gráfban legrövidebb utat meghatározni?
4. Törpfalván járvány ütötte fel a fejét az követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem hallgatnak a WHO-ra, sőt, az Operatív Törzsre sem, és nem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?
5. Tervezzünk hatékony algoritmust, amelynek inputja egy (szomszédossági mátrixával megadott) $G = (V, E)$ (irányított) gráf és egy k szám, outputja pedig minden $u, v \in$ csúcspárra megadja, hogy G-ben hány különböző u-ból v-be vezető k élből álló élsorozat található. (Pl. $k = 1$ esetén az inputként megadott szomszédossági mátrix outputnak is kiváló.)
6. Legyenek $l_1, l_2 : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvények a $G = (V, E)$ gráfon. Igaz-e, hogy ilyenkor $dist_{l_1}(u, v) + dist_{l_2}(u, v) = dist_{l_1+l_2}(u, v)$ mindig teljesül minden $u, v \in V$-re?
7. Az alábbi bal oldali ábrán látható gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden e-től különböző v csúcsra egy legrövidebb ev utat. A középső ábrán látható gráfban találjunk minden pontból egy legrövidebb utat i-be.

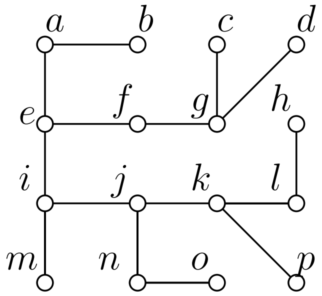


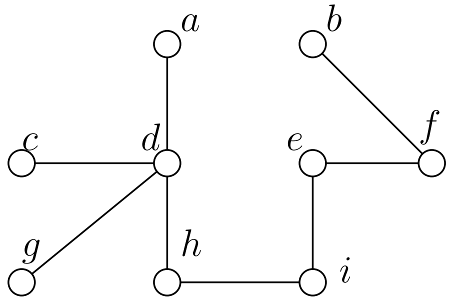




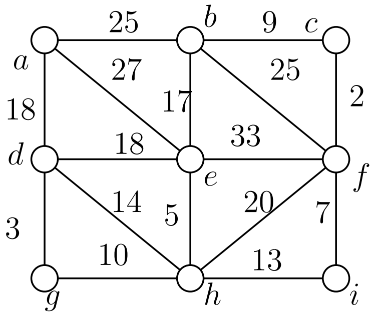
8. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A fenti jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (Az utcák által határolt beépített területek felett repülési tilalom van érvényben.)
9. Lehetséges-e, hogy a bal oldali ábrán látható G gráf megvastagított élei a G egy mélységi fáját alkotják?
10. Az alábbi középső ábrán látható a G irányítatlan gráfnak egy i gyökérből induló mélységi bejárása után kapott F feszítőfája. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit.
11. Tegyük fel, hogy az alábbi jobb oldali ábrán látható F fa a G gráfnak egyszerre az h-gyökerű BFS fája és a d-gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

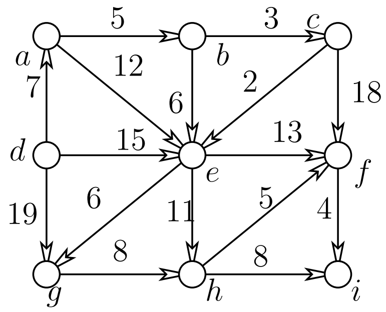


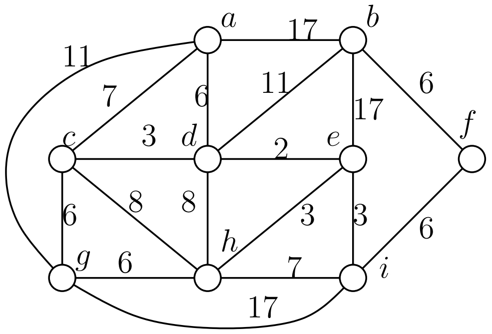




12. Mutassunk példát olyan irányított $D = (V, E)$ gráfra, az éleken egy $l : E \to \mathbb{R}$ hosszfügvényre, hogy alkalmas $s \in V$ pontból indítva a Dijkstra algoritmust, helytelen eredményt kapunk.
13. Adott a $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf, G élein egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfüggvény, egy $r \in V$ gyökérpont, valamint egy k pozitív egész. Tegyük fel, hogy l olyan, hogy nincs negatív összhosszúságú kör. Tervezzünk olyan gyors algoritmust, amely megtalálja G-nek mindazon v csúcsait, amelyekbe vezet r-ből legfeljebb k élből álló legrövidebb út.
14. A D irányított gráf *topologikus rendezése* a D csúcsainak egy olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre az teljesül, hogy $v_iv_j \in E$ esetén $i < j$ (azaz minden él „balról jobbra” mutat). Igazoljuk, hogy D-nek pontosan akkor van topologikus sorrendje, ha D DAG.
15. Mutassuk meg, hogy ha D DAG, akkor a mélységi keresése utáni befejezési sorrend megfordítása topologikus rendezést ad.
16. Határozzuk meg a középső ábrán megadott PERT probléma minden tevékenységéhez a legkorábbi kezdési időpontot, valamint a c tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható. Melyik tevékenységek kritikusak, azaz melyek azok a csúcsok, amelyeknek a kezdési időpontjában történő bármely késedelem a teljes PERT feladat befejezését az optimálishoz képest a késedelem idejével megnöveli?







17. Mi köze a PERT problémának a legrövidebb utakhoz?
18. Tervezzünk hatékony algoritmust, amely adott PERT probléma és adott u és v tevékenységek (gráfcsúcsok) esetén a PERT feladatnak olyan optimális ütemezését adja meg (már amennyiben ilyen létezik), amelyben az u tevékenységet hamarabb kezdjük v-nél.

Házi feladat.

1. G egy irányított gráf, gráf élein egy $l : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tudjuk, hogy G-ben nincs negatív összsúlyú kör. A csúcsok egy része piros, a többi kék. Adjunk egy hatékony (polinomiális) algoritmust, amely bármely két pont között megadja a legrövidebb olyan út hosszát, amely tartalmaz piros pontot.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden irányított gráf két DAG uniója. (Vagyis kiszínezhetők az élek pirossal és kékkel úgy, hogy az egyszínű élek DAG-ot alkotnak.)