

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

13. gyakorlat, 2021. május 10-11.

*Legrövidebb utak, BFS, DFS, Dijkstra, Ford, Floyd, PERT*

**Def:** Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfüggvény. Az  $uv \in E$  él hossza alatt az  $l(uv)$ -t értjük. A  $G$  egy  $P$  útjának a hossza a  $P$  éleinek összhossza. Az  $u, v \in V$  pontok távolságát  $dist_l(u, v)$  jelöli, melyre  $dist_l(u, v) = \ell$ , ha létezik  $\ell$  hosszúságú  $uv$  út  $G$ -ben, de  $\ell$ -nél rövidebb nincs. (Ha nincs  $uv$ -út  $G$ -ben, akkor  $dist_l(u, v) = \infty$ . Ha nem adjuk meg az  $l$  távolságfüggvényt, akkor az  $l \equiv 1$  függvényre gondolunk; ekkor minden út hossza az út éleinek számát jelenti.)

1. Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf,  $G$  élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvény. Tegyük fel, hogy egy  $u$ -ból  $v$ -be vezető élsorozat éleinek összhossza  $\ell$ . Igazoljuk, hogy  $dist_l(u, v) \leq \ell$ .

*Megoldás:* Induljunk el  $u$ -ból az élsorozat mentén, és minden csúcsba megérkezve azon az élen menjünk tovább, ami az élsorozatnak az adott csúcsból kiinduló élei közül az élsorozatban a legkésőbb található. Így olyan  $uv$ -utat kapunk, aminek a hossza legfeljebb az élsorozat éleinek összhossza.

2. Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf,  $G$  élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvény, valamint egy  $r \in V$  gyökérpont. Tegyük fel, hogy  $d(r) = 0$ , továbbá  $d(v) \geq dist_l(r, v)$  teljesül minden  $r \neq v \in V$  esetén. Ha valamely  $uv \in E$  esetén  $d(v) > d(u) + l(u, v)$ , akkor végrehajtható az  $uv$  élmenti javítás, amikor is  $d(v)$  értékét  $d(u) + l(u, v)$ -re csökkentjük.

- Igazoljuk, hogy a fenti élmenti javítás után kapott  $d$  függvényre  $d(v) \geq dist_l(r, v)$  teljesül.

*Megoldás:* Van  $r$ -ből legfeljebb  $d(u)$  hosszú  $ru$ -út, ezt az  $uv$  éllel kiegészítve egy legfeljebb  $d(u) + l(u, v)$  hosszú  $rv$ -élsorozatot kapunk, és ennél a legrovidebb  $rv$ -út sem lehet hosszabb.

- Mutassuk meg, hogy ha  $d(v) = dist_l(r, v)$  teljesül minden  $v \in V$  pontra, akkor nem végezhető élmenti javítás.

*Megoldás:* Az előző megfigyelésből következik, hogy a javítás utáni  $d$  függvény is felső becslés a távolságokra. Ám ez a  $d(v)$  csökkentése után nem teljesül.

- Bizonyítsuk be, hogy ha nem végezhető élmenti javítás, akkor  $d(v) = dist_l(r, v)$  teljesül minden  $v \in V$  csúcsra.

*Megoldás:* Ha  $d(v) > dist_l(r, v)$ , akkor egy legrovidebb  $rv$ -út valamelyik éle mentén lehet javítani.

- Igazak-e a fentiek akkor, ha a távolságfüggvény negatív értékeket is felvehet? Miért?

*Megoldás:* Az első kettő nem igaz. Ellenpélda egy  $C_3$ , minden él hossza  $-1$ . Ekkor  $d \cong dist_l$  esetén végezhető élmenti javítás (csak a jobb becslést realizáló élsorozat már nem út). A harmadik ugyan igaz, de azzal meg az a gond, hogy előfordulhat, hogy mindig van élmenti javítás. Ez viszont csak akkor fordul elő, ha van negatív kör. Egyébként, ha viszont nincs negatív kör, akkor igaz marad.

- Mi a helyzet akkor, ha a  $dist_l(u, v)$  definíciójában legrovidebb út helyett legrovidebb élsorozattal dolgozunk?

*Megoldás:* Ha nincs negatív kör, akkor mindegy, hogy úttal vagy élsorozattal definiáljuk a távolságot. Ha van, akkor viszont bizonyos távolságok közül néhány így  $-\infty$  lesz.

3. Hogyan lehet zsineggel, vonalzóval és csavaralátétekkel nemnegatív élhosszok mellett irányítatlan gráfban legrovidebb utat meghatározni?

*Megoldás:* Elkészítjük a gráf modelljét: az alátétek a csúcsok, és megfelelő hosszúságú zsinetek az élek. Ekkor egy csúcsnál fogva felemelve a gráfot, a többi csúcs mindegyike pontosan annyival lesz alatta, mint a két csúcs távolsága. A kifeszülő zsinetek pedig pontosan azok az élek, amelyek a gyökérből induló, egyik legrovidebb úton rajta vannak.

4. Törpfalván járvány ütötte fel a fejét az követően, hogy csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem hallgatnak a WHO-ra, sőt, az Operatív Törzsre sem, és nem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha egy beteg törp egy nem immunis, egészséges törppel találkozik, az

utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpöfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kiterjedését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?

*Megoldás:* Húzzuk össze egy ponttá a kezdetben fertőzött törpöket a barátsággráfban. A járvány BFS szerint terjed a gráfban a gyökértől kifelé.

Ismerkedős törpökkel akármeddig eltarthat a járvány. Ha az ismeretségi gráf egy 3 pontú út, és miután az első törpe kigyógyul, megismerkedik az utolsóval, akkor a járvány körbe-körbe jár a kör mentén.

5. Tervezzük hatékony algoritmust, amelynek inputja egy (szomszédossági mátrixával megadott)  $G = (V, E)$  (irányított) gráf és egy  $k$  szám, outputja pedig minden  $u, v \in$  csúcspárra megadja, hogy  $G$ -ben hány különböző  $u$ -ból  $v$ -be vezető  $k$  élből álló élsorozat található. (Pl.  $k = 1$  esetén az inputként megadott szomszédossági mátrix outputnak is kiváló.)

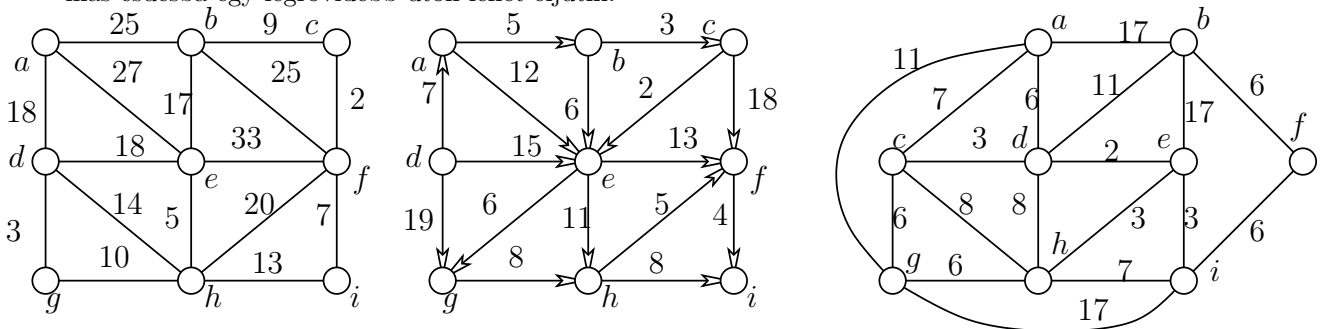
*Megoldás:* A szomszédossági mátrix  $k$ -dik hatványát kell kiszámolni, pl gyors hatványozással.

6. Legyenek  $l_1, l_2 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  élhosszfüggvények a  $G = (V, E)$  gráfon. Igaz-e, hogy ilyenkor  $dist_{l_1}(u, v) + dist_{l_2}(u, v) = dist_{l_1+l_2}(u, v)$  mindig teljesül minden  $u, v \in V$ -re?

*Megoldás:* Abszolút nem. Legyen két párhuzamos  $uv$  él  $G$ -ben,  $e$  és  $f$ . Legyen  $l_1(e) = 1, l_1(f) = 2, l_2(e) = 2, l_2(f) = 1$ . Ekkor  $dist_{l_1}(u, v) = dist_{l_2}(u, v) = 1$ , de  $dist_{l_1+l_2}(u, v) = 3$ .

7. Az alábbi bal oldali ábrán látható gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden  $e$ -től különböző  $v$  csúcsra egy legrövidebb  $ev$  utat. A középső ábrán látható gráfban találjunk minden pontból egy legrövidebb utat  $i$ -be.

*Megoldás:* Nemnegatív élhosszokkal megadott gráf egy csúcsából kell megtalálni minden más csúcsba egy legrövidebb utat. Az órán tanult Dijkstra algoritmus alkalmas erre. Ha az algoritmus végrehajtása során minden csúcshoz megjelölünk egy olyan élt, amely az adott csúcs gyökértől való távolságát beállította, akkor a megjelölt élek alkotta feszítőfa rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a gyökérből annak mentén minden más csúcsba egy legrövidebb úton lehet eljutni.



8. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A fenti jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellet, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült ösztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (Az utcák által határolt beépített területek felett repülési tilalom van érvényben.)

*Megoldás:*

Vizsgáljuk egy optimális megoldást! Órarugógerincű barátunk útja a megadott gráf egy olyan zárt élsorozatának felel meg, ami minden élt legalább egyszer tartalmaz. Készítsük el azt a gráfot, amelyet az ábrabeliből úgy kapunk, hogy minden élt annyi párhuzamos példányban húzzunk be, ahányszor OF végigrepült az adott útszakaszon. Az így kapott  $G'$  gráfon OF útja egy Euler-körséta lesz. A feladatunk tehát az, hogy a lehető legkisebb összhosszúságú párhuzamos élek behúzásával elérjük, hogy a kapott  $G'$  gráfnak legyen

Euler-körsétája. Mivel az eredeti  $G$  gráf összefüggő, ezért az Euler-körséta létezésére vonatkozó, órán tanult tétel szerint csupán azt kell elérni, hogy minden foksám páros legyen a párhuzamos élek behúzása után. Világos, hogy egyetlen élnek sem érdemes két párhuzamos példányát behúzni az eredeti mellé, hiszen ekkor kettővel kevesebb párhuzamos példányt behúzva egyrészt párosak maradnának a foksámok, másrészt a párhuzamosan behúzott élek összhossza csökkenne. Márpedig egy fenyegető menyétinvázió árnyékában egyetlen hazafi sem vállalhat felesleges sétarepülést. Az ábrán megadott gráfnak pontosan két páratlan fokú pontja van:  $d$  és  $h$ . A megpárhuzamosított élek tehát egy  $d$  és  $h$  közötti utat jelölnek ki  $G$ -ben, a mi célunk pedig ezen út összhosszának minimalizálása.

Egy legrövidebb  $dh$  utat kell tehát keresnünk. Ez a tanult algoritmusok nélkül is megy, hiszen a  $deh$  út hossza 5, és ennél rövidebb élen csak  $c$ -be juthatunk  $d$ -ből, ahonnan nem lehet 5-nél rövidebb élen folytatni az utat. OF optimális útvonala tehát olyan lesz, ami minden élt pontosan egyszer jár be, kivéve a kétszer bejárt  $de$  és  $dh$  éleket. A feladat szerint meg is kell tervezni egy ilyen útvonalat. Erre egy lehetőség egy tetszőleges Euler-séta  $d$ -ből  $h$ -ba, majd a  $he$  ill  $ed$  élek bejárása. Szegény Felpattanó! Rajta tán még ez sem segít. Nosza, itt egy itiner, hogy még Mutyipusztán is értsék:  $dcabdebfielhigchged$

9. Lehetséges-e, hogy a bal oldali ábrán látható  $G$  gráf megvastagított élei a  $G$  egy mélységi fáját alkotják?

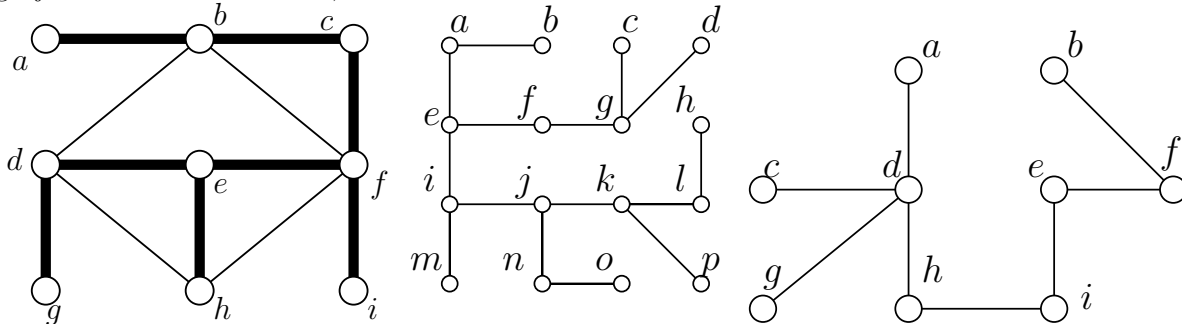
*Megoldás:* Irányítatlan gráfban DFS után nincs keresztél. Ha  $dh$  nem keresztél, akkor a gyökér nem lehet  $a, b, c, e, f, i$ . Ha  $hf$  nem keresztél, akkor a gyökér nem lehet  $g, d, e$ . Egyedül  $h$ -t nem zártuk ki, azonban ha  $h$  lenne a gyökér, akkor  $bd$  keresztél volna. Igazoltuk tehát, hogy a vastag élek nem alkotják a  $G$  feszítőfáját.

10. Az alábbi középső ábrán látható a  $G$  irányítatlan gráfnak egy  $i$  gyökérből induló mélységi bejárása után kapott  $F$  feszítőfája. Tudjuk, hogy az  $e$  csúcs  $G$ -beli fokszáma 7. Határozzuk meg a  $G$  gráf  $e$ -ből induló éleit.

*Megoldás:* Tudjuk, hogy irányítatlan gráf mélységi bejárása utáni osztályozásban a gráfnak nincs keresztéle, azaz olyan éle, amely olyan csúcsokat köt össze, melyek nem leszármazottai egymásnak. Ezek szerint az  $e$  csúcs csakis a fabeli leszármazottaival vagy őseivel lehet összekötve, konkrétan az  $a, b, f, g, c, d$  és  $i$  pontokkal. Mivel tudjuk, hogy  $e$ -nek pontosan 7 szomszédja van, ezért  $e$  szomszédosságát pontosan az iménti 7 pont alkotja, így a  $G$  gráf  $e$ -ből induló élei éppen az  $ea, eb, ef, eg, ec, ed, ei$  élek.

11. Tegyük fel, hogy az alábbi jobb oldali ábrán látható  $F$  fa a  $G$  gráfnak egyszerre az  $h$ -gyökerű BFS fája és a  $d$ -gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet  $G$ -nek?

*Megoldás:* Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráfban a DFS bejárás után nem lesz keresztél, és az is szerepelt, hogy a BFS fának csak olyan csúcsai között futhatnak  $G$  élei, melyek gyökértől mért távolsága legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Tehát  $G$  minden, a megadott fában nem szereplő éle a  $d$  gyökérből nézve leszármazottakat köt össze, míg a  $h$  gyökérből nézve keresztélnek kell lennie. Ebből az következik, hogy csak olyan éle lehet  $G$ -nek a megadottakon kívül, amely  $d$ -ből indul, továbbá (mivel  $d$  a  $h$ -tól 1 távolságra van), az él másik végpontja  $h$ -tól a fában 0, 1 vagy 2 távolságra lehet. Az  $d$  további szomszédai tehát csakis  $i$  és  $e$  lehetnek, ráadásul mindkettő valóban lehet is szomszéd, hisz mind a DFS, mind a BFS meg tudja találni  $F$ -et, ha ezen élek jelenlétében futtatjuk a megfelelő gyökérből. Ez azt jelenti, hogy  $G$ -nek az  $F$  élein túl legfeljebb két további éle lehet, ami összesen 10 él. Ez a válasz tehát a feladat kérdésére.



12. Mutassunk példát olyan irányított  $D = (V, E)$  gráfra, az éleken egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  hosszfüggvényre, hogy alkalmas  $s \in V$  pontból indítva a Dijkstra algoritmust, helytelen eredményt kapunk.

*Megoldás:* Legyen  $l(sa) = 1$ ,  $l(sb) = 2$ ,  $l(ba) = -2$ . Az  $a$ -t késznek fogjuk nyilvánítani az első körben, 1 súllyal, pedig  $b$ -n keresztül rövidebb (0 súlyú) úton el lehet hozzá jutni.

13. Adott a  $G = (V, E)$  (irányított vagy irányítatlan) gráf,  $G$  élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  élhosszfüggvény, egy  $r \in V$  gyökérpont, valamint egy  $k$  pozitív egész. Tegyük fel, hogy  $l$  olyan, hogy nincs negatív összhosszúságú kör. Tervezzünk olyan gyors algoritmust, amely megtalálja  $G$ -nek mindazon  $v$  csúcsait, amelyekbe vezet  $r$ -ből legfeljebb  $k$  élből álló legrövidebb út.

*Megoldás:* A Fordot módosítjuk úgy, hogy minden javításnál nyilvántartjuk, hogy melyik csúcsból javítottunk, és azt hogy hány élű az eddigi legkevesebb élből álló legrövidebb út ebbe a csúcsba. (Ha egy élmenti javításnál ugyanazt a távolságot kapjuk, de az élszám csökken, akkor is javítunk.) A Ford végén a nyilvántartott mutatók egy olyan legrövidebb utak fáját adják, amelyek a gyökérből minden pontba egy legkevesebb élű legrövidebb utat tartalmaz. A fában a gyökértől legfeljebb  $k$  élen elérhető pontok adják a keresett halmazt.

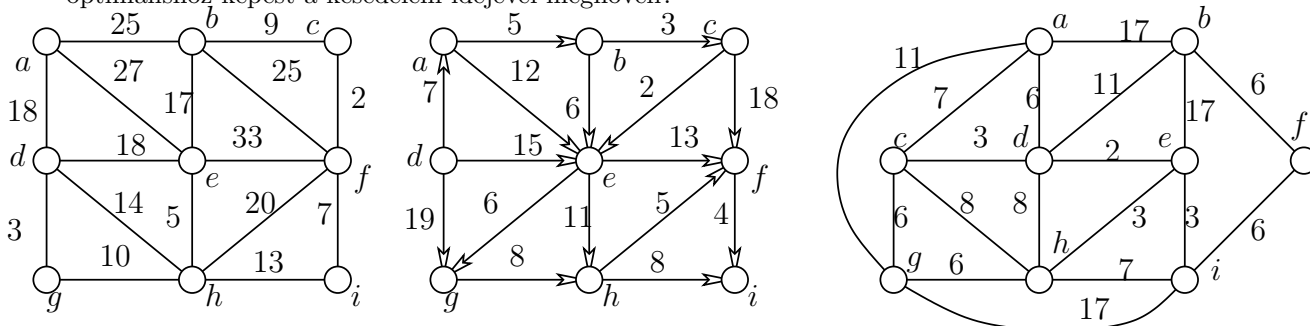
14. A  $D$  irányított gráf *topologikus rendezése* a  $D$  csúcsainak egy olyan  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sorrendje, amelyre az teljesül, hogy  $v_i v_j \in E$  esetén  $i < j$  (azaz minden él „balról jobbra” mutat). Igazoljuk, hogy  $D$ -nek pontosan akkor van topologikus sorrendje, ha  $D$  DAG.

*Megoldás:* Tegyük fel, hogy van topologikus rendezés. Mivel minden él „balról jobbra” mutat, vagyis minden él végpontjának az indexe nagyobb, mint a kezdőponté, világos, hogy nincs irányított kör. Most tegyük fel, hogy nincs irányított kör. Ekkor viszont biztos van olyan pont, amiből nem megy ki él (nyelő), mert ha nem lenne, akkor elindulhatnánk egy irányított út mentén és sose akadnánk el, ezért végül találnánk egy irányított kört. Most ezt a nyelőt tegyük be utolsónak a rendezésben, és keressünk egy új nyelőt, stb.

15. Mutassuk meg, hogy ha  $D$  DAG, akkor a mélységi keresése utáni befejezési sorrend megfordítása topologikus rendezést ad.

*Megoldás:* Az elsőnek befejezett pontból csak visszaél indulhat. Viszont mivel  $D$  DAG, ilyen nincs, tehát ez a csúcs nyelő. Ha töröljük ezt a pontot a gráfból, akkor a DFS ugyanúgy fut, csak ezt a pontot nem találja meg. Szóval a másodiknak befejezett pont nyelő az első pont törlésével keletkező gráfban, stb.

16. Határozzuk meg a középső ábrán megadott PERT probléma minden tevékenységéhez a legkorábbi kezdési időpontot, valamint a  $c$  tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható. Melyik tevékenységek kritikusak, azaz melyek azok a csúcsok, amelyeknek a kezdési időpontjában történő bármely késedelem a teljes PERT feladat befejezését az optimálishoz képest a késedelem idejével megnöveli?



*Megoldás:* Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az  $d, a, b, c, e, g, h, f, i$  sorrendet. Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) Meg kell még határoznunk a  $c$  tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a projekt még a lehető legrövidebb időn belül befejezhető. Vegyük észre, hogy a  $c$  tevékenység kezdése közvetlenül csak azokra a tevékenységekre hat, amelyekbe  $c$ -ből él fut, konkrétan az  $e$  és  $f$  tevékenységekre. Azonban  $e$  és  $f$  mindegyike rajta van a  $daeghfi$  kritikus úton, így ezeknek a tevékenységeknek muszáj az imént kiszámított kezdési időben elkezdődniük. A  $c$  tevékenység legkésőbbi kezdési ideje tehát az a legnagyobb érték, ami még nem veszélyezteti  $e$  és  $f$  időbeni kezdését. A  $ce$  él miatt  $c$  nem kezdődhet 17-nél, a  $cf$  él miatt pedig 20-nál később. A válasz tehát a 17 kezdési idő a  $c$  tevékenységre.

17. Mi köze a PERT problémának a legrövidebb utakhoz?

*Megoldás:* A PERT-ben minden  $v$  csúcsához egy  $v$ -be vezető (bárhonnan induló) leghosszabb utat keresünk. Ez az úthossz lesz az adott  $v$  csúcsnak megfelelő tevékenység legkorábbi kezdési ideje. A leghosszabb út meg

mindjárt legrövidebb lesz, ha negáljuk az élhosszokat. Negatív élhosszokkal meg akkor tudunk legrövidebb utat keresni (pl Forddal vagy Floydal), ha nincs negatív kör. Ja, és ilyen nincs, hisz kör sincs. A PERT módszer egy ezektől különböző (és hatékonyabb) dinamikus programozási eljárás, viszont csak akkor alkalmazhatjuk, ha nincs irányított kör.

18. Tervezzünk hatékony algoritmust, amely adott PERT probléma és adott  $u$  és  $v$  tevékenységek (gráfcsúcsok) esetén a PERT feladatnak olyan optimális ütemezését adja meg (már amennyiben ilyen létezik), amelyben az  $u$  tevékenységet hamarabb kezdjük  $v$ -nél.

*1. megoldás:* Bevezetünk egy 0 hosszú  $uv$  élt. Ha ezáltal a gráf DAG marad és az optimum sem változik, akkor van ilyen ütemezés (és a PERT meg is találja a kiegészített gráfon futtatva), ha nem, akkor nem.

*2. megoldás:* Megnézzük, hogy van-e  $v$ -ből út  $u$ -ba. Ha igen, akkor egyáltalán nincs ilyen ütemezés. Ha nincs út, akkor meghatározzuk  $u$  legkorábbi és  $v$  legkésőbbi kezdési idejét optimális ütemezés mellett. (Ez két PERT feladat megoldását jelenti, a második a fordított élű gráfon (fordított top sorrenddel) történik.) Ha az utóbbi kezdési idő az előbbit követi, akkor igen a válasz, egyébként meg nem. Ugyanis tekintsük a sima PERT által adott  $f$  ütemezést, amikor mindent a lehető leghamarabb kezdünk el, és nézzük azt a  $g$ -t, amikor mindent az utolsó pillanatban. Ha most minden  $u$  előtti tevékenységet az  $f$  szerint, az összes többit meg a  $g$  szerint kezdjük, akkor olyan optimális ütemezést kapunk, amiben  $u$  megelőzi  $v$ -t.

### Házi feladat.

1.  $G$  egy irányított gráf, gráf élein egy  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  súlyfüggvény. Tudjuk, hogy  $G$ -ben nincs negatív összsúlyú kör. A csúcsok egy része piros, a többi kék. Adjunk egy hatékony (polinomiális) algoritmust, amely bármely két pont között megadja a legrövidebb olyan út hosszát, amely tartalmaz piros pontot.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden irányított gráf két DAG uniója. (Vagyis kiszínezhetők az élek pirossal és kékkel úgy, hogy az egyszínű élek DAG-ot alkotnak.)