

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

11. gyakorlat, 2021. április 26-27.

Síkgráfok

Tudnivalók:

G síkgráf, ha lerajzolható a síkra metszés nélkül. Tegyük fel, hogy G le van rajzolva a síkra metszés nélkül, n csúcs, e él, t tartomány, k összefüggő komponens. **Euler formula:** $n - e + t = k + 1$.

Következmény: Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú páros síkgráf, akkor $e \leq 2n - 4$. Sőt, ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, amelyben nincs háromszög, már akkor is $e \leq 2n - 4$.

Következmény következménye: K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Négyszíntétel (Appel-Haken 1976) Ha G síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 4$. (Ez nem javítható, pl K_4 .)

Topologikus izomorfia. Definiálunk két operációt, amelyek egymás inverzei. 1. operáció: A G gráf két szomszédos csúcsa legyen u és v , töröljük el az uv élt és vezessünk be egy új x csúcsot, amelynek két szomszédja van, u és v . 2. operáció: Tegyük fel, hogy G -ben x foka 2, szomszédai u és v . Töröljük el az x csúcsot és az xu , xv éleket, viszont húzzuk be az uv élt.

A G és H gráfok topologikusan izomorfak, ha az 1. és 2. operáció ismételt alkalmazásával el lehet jutni G -ből H -ba.

Észrevétel: Tegyük fel, hogy G és H gráfok topologikusan izomorfak. Ekkor G síkgráf $\Leftrightarrow H$ síkgráf.

Kuratovski tétel (1930) G akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmaz K_5 -tel és $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot.

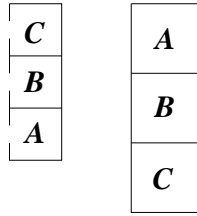
Fáry-Wagner tétel (1936, 1948) Ha G síkgráf, akkor lerajzolható metszés nélkül úgy, hogy az élei egyenes szakaszok.

- (i) Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráfnak pontosan $3n - 6$ éle van. Bizonyítsuk be, hogy minden tartománya háromszög. (ii) Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n - 6$ éle van.

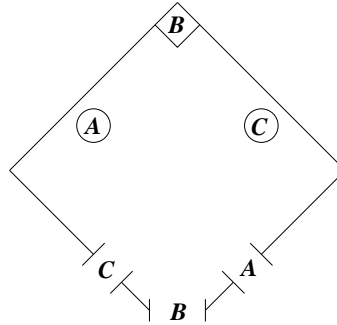
- Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?

Megoldás:

- Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + e(G) - 2t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.
- Biz. be: Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - együttal tóruszra is rajzolható;
 - ha G -nek $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
 - G -nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
- Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
- Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és \overline{G} egyike biztosan nem síkgráf.
- Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
- Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
- Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.
- Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g , akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.

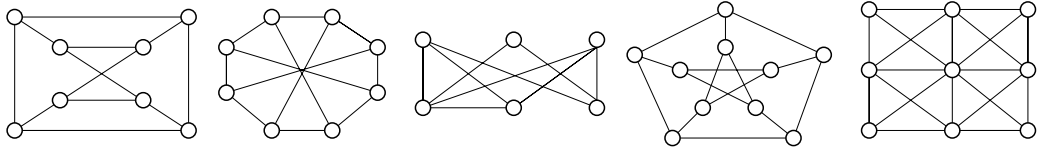


1. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



2. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

11. Egy 20-csúcű poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
 12. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e, \overline{C_7}$ gráfok? Hát az alábbiak?



13. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
 a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
 b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
 14. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
 15. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkeresztezők lehetséges minimális számát. (Feltesszük, hogy három él nem metszheti egymást ugyanabban a pontban.) Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke? Mennyi $cr(K_6)$?
 16. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.
 17. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G -be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.
 18. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
 19. (Hanani-Tutte tétel) (*) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf!
 20. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)
 Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnék utakat építeni mindhárom lakástól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresszezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

b. Ráadásul a nyaralók is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresztezzék egymást?

21. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.

Házi feladat.

1. Legyen G három síkgráf uniója. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 18$.

2. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + 2e(G) - t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 2020 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

3. Az Operatív Törzs szakszerűen feltérképezte az emberek kapcsolati hálóját és a kapott 10000000 csúcsú gráfot sikerült összesen két él-metszéssel felrajzolni a VIP Oltóponton található Operatív Digitális Táblára.

Bizonyítsuk be, hogy az emberek egy részét (nem 0-t és nem is az összeset) karanténba tudják zárni úgy, hogy legfeljebb 5 kapcsolatot kell hatóságilag megszakítani!