Kombinatorika és gráfelmélet 1.

11. gyakorlat, 2021. április 26-27.

Síkgráfok

Tudnivalók:

G síkgráf, ha lerajzolható a síkra metszés nélkül. Tegyük fel, hogy G le van rajzolva a síkra metszés nélkül, n csúcs, e él, t tartomány, k összefüggő komponens. **Euler formula:** $n - e + t = k + 1$.

Következmény: Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú páros síkgráf, akkor $e \leq 2n - 4$. Sőt, ha G egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkgráf, amelyben nincs háromszög, már akkor is $e \leq 2n - 4$.

Következmény következménye: K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok.

Négyszíntétel (Appel-Haken 1976) Ha G síkgráf, akkor $\chi(G) \leq 4$. (Ez nem javítható, pl K_4.)

Topologikus izomorfia. Definiálunk két operációt, amelyek egymás inverzei. 1. operáció: A G gráf két szomszédos csúcsa legyen u és v, töröljük el az uv élt és vezessünk be egy új x csúcsot, amelynek két szomszédja van, u és v. 2. operáció: Tegyük fel, hogy G-ben x foka 2, szomszédai u és v. Töröljük el az x csúcsot és az xu, xv éleket, viszont húzzuk be az uv élt.

A G és H gráfok topologikusan izomorfak, ha az 1. és 2. operáció ismételt alkalmazásával el lehet jutni G-ből H-ba.

Észrevétel: Tegyük fel, hogy G és H gráfok topologikusan izomorfak. Ekkor G síkgráf $\Leftrightarrow$ H síkgráf.

Kuratovski tétel (1930) G akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmaz K_5-tel és $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

Fáry-Wagner tétel (1936, 1948) Ha G síkgráf, akkor lerajzolható metszés nélkül úgy, hogy az élei egyenes szakaszok.

1. (i) Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráfnak pontosan $3n - 6$ éle van. Bizonyítsuk be, hogy minden tartománya háromszög. (ii) Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n - 6$ éle van.

   Megoldás: (i) Legyen n, e, t és k a csúcsok, élek, tartományok és az összefüggő komponensek száma. Az Euler formula alapján $n - e + t = k + 1$. Legyenek $F_1, \ldots, F_t$ a tartományok és legyen f_i az F_i határán levő élek száma. (Ha egy él mindkét oldaláról F_i-t határolja, akkor kétszer számoljuk.) Ekkor $\sum_{i=1}^{t} f_i = 2e$ mivel összesen minden élt mindkét oldaláról számolunk. Mivel G egyszerű gráf, minden i-re $f_i \geq 3$. Ebből $3t \leq \sum_{i=1}^{t} f_i = 2e$ tehát $t \leq 2e/3$. Ezt behelyettesítve, $n - e + 2e/3 \geq k + 1 \geq 2$, tehát $3n - 6 \leq e$. Tehát ha $e = 3n - 6$, akkor az egész számolásban minden egyenlőtlenség helyett egyenlőséget írhatunk, ezért minden minden i-re $f_i = 3$.

   (ii) Nézzük meg újra a számolást. Ha minden tartomány háromszög, akkor a gráf összefüggo, $k = 1$, és minden i-re $f_i = 3$. Ezekkel számolva $3t = \sum_{i=1}^{t} f_i = 2e$, $t = 2e/3$, ezt behelyettesítve, $n - e + 2e/3 = k + 1 = 2$, tehát $3n - 6 = e$.

2. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?

   Megoldás: Világos, hogy $t = 7$. Ha a gráf nem lenne összefüggő, akkor lenne egy olyan lapja, ami egyszerre két összefüggő komponenssel is határos, de ez nem lehetne se háromszög, se négyszög, se ötszög. Tehát a gráf összefüggő. Tudjuk, hogy $2e = \sum f_i$, itt $2e = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 = 26$, vagyis $e = 13$. Behelyettesítve az Euler formulába: $n - 13 + 7 = 2, = 8$.

3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + e(G) - 2t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.

   Első megoldás: Tegyük fel, hogy az α él olyan, hogy G-nek benne van egy körében. Ekkor, ha elvesszük, a kapott G' gráf is összefüggő lesz. Érdemes elvenni? Nézzük, hogyan változik az $n(G) + e(G) - 2t(G)$ mennyiség. $n(G') = n(G)$, $e(G') = e(G) - 1$, ezek triviálisak, és mivel az elvett α él benne volt egy körben, a két oldalán két különböző tartomány volt, amik az elvételével egyesülnek. Tehát $t(G') = t(G) - 1$. Ezért $n(G') + e(G') - 2t(G') = n(G) + e(G) - 2t(G) + 1$. Vagyis érdemes elvenni, a kérdéses mennyiség nő. Tehát abban a 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráfban, amelyben $n(G) + e(G) - 2t(G)$ maximális, nincs kör, vagyis G egy fa. Ekkor $n = 100$, $e = 99$, $t = 1$, $n(G) + e(G) - 2t(G) = 197$.

Második megoldás: Mivel G összefüggő, $n - e + t = 2$. Tehát $n + e - 2t = n + e - 2t + n - e + t - 2 = 2n - t - 2 = 198 - t$. Tehát ez a mennyiség akkor maximális, ha t minimális. Mivel t minimuma 1, a mennyiség maximuma 197 és ezt akkor érjük el, ha G egy fa.

4. Biz. be: Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
b) ha G-nek $3n - 6$-nál kevesebb éle van, akkor behúzható G-be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
d) G-nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.

Megoldás: a. Ha G síkbarajzolható, akkor gömbre is rajzolható. Rajzoljuk le, majd fúrjunk egy alagutat a gömön, aminek a bejárata és kijárata nem metsz semmilyen élt. Kész is a tórusz.

b. Azt már láttuk egy korábbi feladatban, hogy ha G-nek minden tartománya háromszög, akkor $3n - 6$ éle van. Mivel most kevesebb élünk van, van egy N nem háromszög taromány. Legyen a, b, c, d négy különböző pont a határán, ebben a sorrendben. Ha a és c nincsenek összekötve N-en kívül, akkor kössük őket össze N-en belül és kész vagyunk. Ha össze vannak kötve, akkor viszont b és d nem lehetnek összekötve, mert akkor az ac és bd él metszené egymást. Ezért összeköthetjük b-t és d-t N-en belül, és kész vagyunk.

c. Az Euler formula alapján $n - e + t = k + 1$ vagyis $t = k + 1 - n + e$. Mivel n, e és k nem függ G lerajzolásától, t se se függhet.

d. Tegyük fel, hogy minden fokszám legalább 4. Ekkor $2e = \sum d_i \geq 4n$, tehát $e \geq 2n$. Most tegyük fel, hogy minden lapnak legalább négy oldala van. Ekkor $2e = \sum f_i \geq 4t$ tehát $e/2 \geq t$. Viszont $n - e + t = 1 + k \geq 2$, behelyettesítve $n - e + e/2 \geq 2$, $e \leq 2n - 4$. Tehát nem lehet egyszerre minden fokszám legalább 4 és hogy minden lapnak legalább négy oldala van.

5. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!

Megoldás: A háromszög alapú hasáb élhálója plusz egy diszjunkt él jo lesz. Nyilván síkgráf, a komplementere egy 6 hosszú kör és két pont, ami a kör minden pontjával össze van kötve, ez is síkgráf.

6. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és $\overline{G}$ egyike biztosan nem síkgráf.

Megoldás: Egy 11 csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3 \cdot 11 - 6 = 27$ éle lehet. A 11 csúcsú teljes gráfnak meg 55 éle van, ezért vagy G-nek, vagy $\overline{G}$-nek legalább 28, tehát nem síkgráf.

7. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a darab négyszög van és b darab nyolcszög. Ekkor $4a + 8b = 3n$, $4a + 8b = 2e$ és $a + b = t$. Ezenkívül $n - e + t = 2$, behelyettesítve $4a/3 + 8b/3 - 2a - 4b + a + b = 2$, $a/3 - b/3 = 2$, $a - b = 6$.

8. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!

Megoldás: Legyenek a házak és kutak a csúcsok, az utak az élek. Ekkor ez egy páros gráf, amelynek $n = 2k$ csúcsa van és $e = 4k$ éle. Tehát $e = 2n$, ami azt jelenti, hogy nem lehet síkgráf, mert egy páros síkgráfnak legfeljebb $2n - 4$ éle van.

9. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.

Megoldás: Minden csúcs szomszédsága egy kört feszít. Ha a két elhagyott csúcs nem szomszédos, akkor elhagyva őket ezek a körök összetartják a gráfot. Ha szomszédosak, akkor meg a szomszédságuk egy kört feszít, és ez összetartja a gráfot. Tehát két pont elhagyása után még összefüggő gráfot kapunk, a gráf 3-összefüggő.

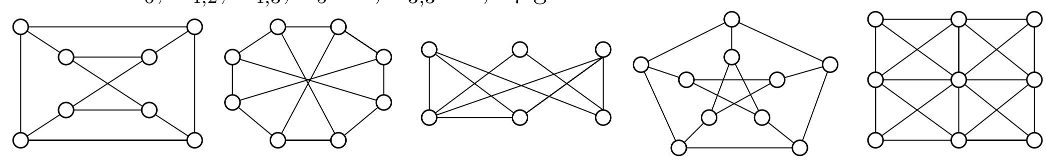
10. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g, akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.

    Megoldás: Az Euler formula alapján $n - e + t = k + 1$. Legyenek $F_1, \ldots, F_t$ a tartományok és legyen f_i az F_i határán levő élek száma. (Ha egy él mindkét oldaláról F_i-t határolja, akkor kétszer számoljuk.) Ekkor $\sum_{i=1}^{t} f_i = 2e$, és a feltevés szerint $f_i \geq g$, tehát $gt \leq \sum_{i=1}^{t} f_i = 2e$ tehát $t \leq 2e/g$. Ezt behelyettesítve, $n - e + 2e/g \geq k + 1 \geq 2$, tehát $e \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.

11. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?

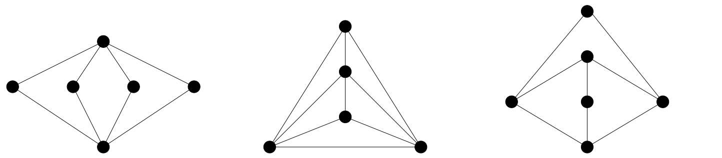
    Megoldás: $n = 20$, $t = 12$, $e = kt/2 = 6k$. $n - e + t = 2$ vagyis $20 - 6k + 12 = 2$, $k = 5$. Ez a dodekaéder.

12. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e, \overline{C_7}$ gráfok? Hát az alábbiak?

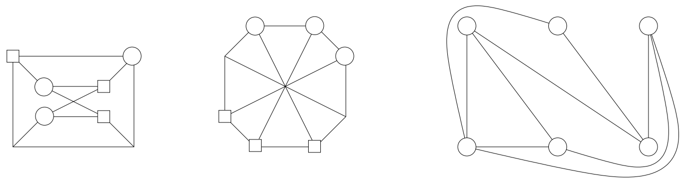


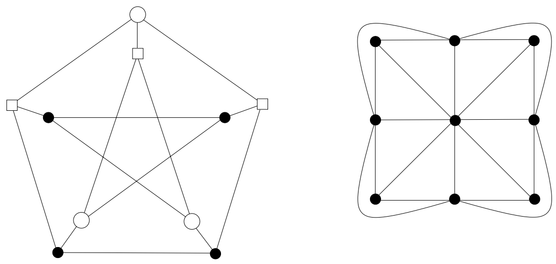
    Megoldás: K_6 nem, tartalmaz K_5-öt. $K_{4,2}$ igen. (ábra) $K_{4,3}$ nem, tartalmaz $K_{3,3}$-at. $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$ igen. (ábra) $\overline{C_7}$ nem, van benne topologikus $K_{3,3}$ Egyik osztály: v_1, v_2, v_3, a másik: v_4, v_5, v_6, minden közvetlenül össze van kötve, kivéve v_3 és v_4, ők v_7-en keresztül.

    Az eredeti ábrán levő gráfok: nem, nem, igen, nem, igen. Ami nem, ott topologikus $K_{3,3}$ van. (ábra)



$K_{4,2}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$





13. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
    a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
    b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.

    Megoldás: a. Tudjuk, hogy $e \leq 3n - 6$. Tegyük fel, hogy minden i-re $d_i \geq 6$. Ekkor $2e = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq \sum_{i=1}^{n} 6 = 6n$ vagyis $e \geq 3n$, ellentmondás. Tehát van legfeljebb ötödfokú csúcs.

    b. Tegyük fel, hogy minden i-re $d_i \geq 5$ és k darab pontosan ötödfokú csúcs van, a többi csúcs foka legalább 6. Ekkor $6n - 12 \geq 2e = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq \sum_{i=1}^{n} 6 - k = 6n - k$. Tehát $k \geq 12$.

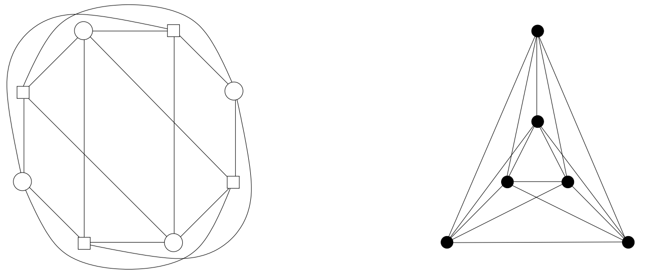
14. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!

    Megoldás: G nem tartalmaz topologikus K_5-öt, mert ahhoz legalább 5 csúcs kell, aminek a foka legalább 4. És topologikus $K_{3,3}$-at se tartalmaz, mert akkor lenne benne legalább 6 hosszú kör. Tehát a Kuratowski tétel alapján síkgráf.

15. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkeresztezések lehetséges minimális számát. (Feltesszük, hogy három él nem metszheti egymást ugyanabban a pontban.) Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke? Mennyi $cr(K_6)$?

   Megoldás: $K_{4,4}$: Vegyünk egy $K_{4,4}$-et, lerajzolva a síkra, mind a lehetséges 16 módon válasszunk ki 3-3 pontot a két osztályból és nézzük meg a feszített $K_{3,3}$-at, az örökölt lerajzolásban. Mind a 16 esetben találnunk kell egy metszést, hiszen $K_{3,3}$ nem síkgráf. Egy konkrét metszést ezzel az eljárással legfeljebb 4-szer találhattunk meg, mert a két metsző él 4 végpontján kívül meg 1-1 csúcsot kell kiválasztanunk a maradék 2-2 csúcsból. Tehát kell lennie legaább $16/4 = 4$ metszésnek. Ennyivel le is lehet rajzolni. (ábra)

   K_6: Itt is vegyünk egy lerajzolást és vegyük mind az öt K_5 részgráfot. Találtunk 5 metszést, hiszen K_5 sem síkgráf. Egy metszést max kétszer számolhattunk, tehát legalább 3 metszés volt. Ennyivel le is lehet rajzolni. (ábra)



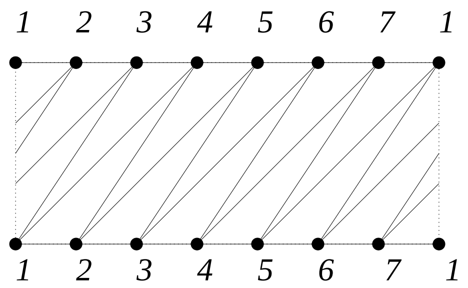
$K_{4,4}$ és K_6

16. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.

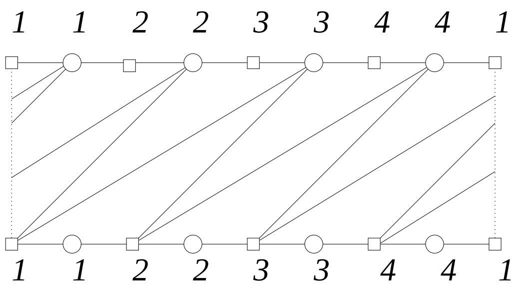
   Megoldás: Ugyanúgy, mint az előbb, vesszük az összes feszített $K_{3,3}$ részgráfot. Ez $\binom{5}{3}\binom{5}{3} = 100$ lehetőség, tehát találunk ennyi metszést, és egyet legfeljebb 9-szer számoltunk. Tehát van legalább $\lceil 100/9 \rceil = 11$ metszéspont.

17. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G-be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.

   Megoldás: Lerajzolás: ábra. Legyen G egy síkbarajzolt gráf. Vegyük inkább egy gömbre rajzolását (pl sztereografikus projekcióval). Hozzá akarjuk még adni az uv élt. Fúrjunk egy vékony lukat, ami a v csúcs közelében kezdődik és az u csúcs közelében végződik. Ezzel egy tóruszt kaptunk, és ezen az alaguton keresztül össze tudjuk kötni u-t és v-t.



K_7 a tóruszon



$K_{4,4}$ a tóruszon

18. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!

    Megoldás: Tfh n csúcsa van a gráfnak. Mivel 4-reguláris, $2e = \sum d_i = \sum 4 = 4n$, tehát $2n$ éle van. De ez túl sok. Tudjuk, hogy egy páros síkgráfnak csak $2n - 4$ éle lehet. Tehát nem lehet síkbarajzolható.

19. (Hanani-Tutte tétel) (*) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf!

    Megoldás: Erre sok szép bizonyítás van, itt csak vázolom az egyiket. Belátjuk, hogy egy ilyen gráfban nem lehet topologikus K_5 illetve $K_{3,3}$. Vagyis be kell látni, hogy ha lerajzolunk egy topologikus K_5-öt illetve $K_{3,3}$-at, akkor lesz két éle, amik páratlan sokszor metszik egymást. Lássuk be először a „sima” K_5-re. Tfh lerajzoltuk a K_5-öt úgy, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymast, a csúcsok $v_1, \dots, v_5$. Nézzük meg, milyen sorrendben jönnek ki az élek (órajárás szerint) v_1-ből. Mondjuk $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5$. Tekintsük a $v_1v_3v_5$ (önmagát esetleg metsző) kört. Ez felbontja a síkot tartományokra, amelyek kiszínezhetők sakktábla-szerűen (pl. azon pontok, amelyeket páros illetve páratlan sokszor kerül meg a görbe) és nem nehéz látni, hogy v_2 és v_4 különböző színű tartományban vannak, tehát a v_2v_4 páratlan sokszor metszi a kört, ívalamelyik élét is. Ugyanígy érvelhetünk a sima K_5 helyett a topologikus K_5 esetén is.

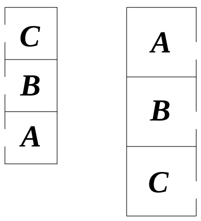
    $K_{3,3,}$: nagyon hasonló. Legyenek a csúcsok $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$. Tfh v_1-ben az élek sorrendje v_1u_1, v_1u_2, v_1u_3, u_1-ben pedig u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3. (minden más sorrendre hasonló az érvelés) Vegyük az $u_1v_1u_2v_2$ kört. A fentihez hasonlóan látható, hogy u_3 és v_3 ellenkező „oldalán” van. Tehát az u_3v_3 él az $u_1v_1u_2v_2$ kört páratlan sokszor metszi, így valamelyik élét is. Topologikus $K_{3,3,}$-ra ugyanígy.

    Ezzel készen vagyunk.

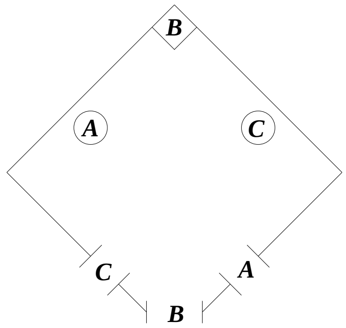
20. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)

    Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnének utakat építeni mindhárom lakastól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresztezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

    b. Ráadásul a nyaralóik is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresztezzék egymást?



Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

Megoldás: Ennek nem írom ide a megoldását. Jó fejtörő!

21. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.

    Megoldás: Tegyük fel, hogy van G-ben egy páratlan C kör. Ez egy R tartományt határol, ami néhány lap, $F_1, \ldots, F_l$ uniója. Legyen f_i szokás szerint az F_i határán levő élek száma, c pedig a C határán levő élek száma. Legyen b az R-ben levő élek száma. Ekkor $\sum_{i=1}^{l} f_i = 2b + c$ hiszen a belső éleket kétszer számoltuk, a C-n levőket egyszer. Mivel minden f_i páros a feltétel szerint, ezért c is páros, ami ellentmondás. Tehát nincs páratlan kör G-ben, G páros gráf.

Házi feladat.

1. Legyen G három síkgráf uniója. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 18$.

2. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + 2e(G) - t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 2020 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

3. Az Operatív Törzs szakszerűen feltérképezte az emberek kapcsolati hálóját és a kapott 10000000 csúcsú gráfot sikerült összesen két él-metszéssel felrajzolni a VIP Oltóponton található Operatív Digitális Táblára.

Bizonyítsuk be, hogy az emberek egy részét (nem 0-t és nem is az összeset) karanténba tudják zárni úgy, hogy legfeljebb 5 kapcsolatot kell hatóságilag megszakítani!