

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

10. gyakorlat, 2021. április 19-20.

## Élszínezés

### Tudnivalók

$L(G)$ :  $G$  élgráfja, csúcsai  $G$  éleinek felelnek meg, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő éleknek  $G$ -ben van közös végpontja.

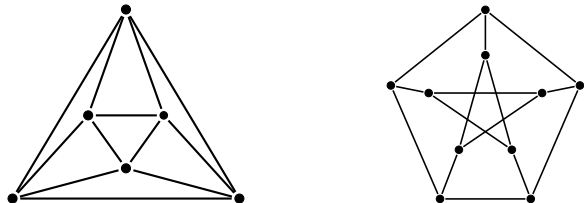
$\chi'(G) = \chi_e(G)$ :  $G$  élkromatikus száma,  $G$  éleinek a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két közös végpontú él különböző színű.) Nyilván  $\chi'(G) = \chi_e(G) = \chi(L(G))$ .

Minden  $G$  gráfra  $\Delta(G) \leq \chi'(G)$ .

Vizing tétel: Minden  $G$  egyszerű gráfra  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Kőnig tétel: Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\Delta(G) = \chi'(G)$ .

1. Legyen  $G$  olyan 3-reguláris egyszerű összefüggő gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor  $\chi'(G) = 4$ .
2. Tegyük fel, hogy  $G$  egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a  $\chi'(G)$  élkromatikus számot.
3. Határozzuk meg a  $K_n$  teljes gráf  $\chi'(K_n)$  élkromatikus számát.
4. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy  $2n$  pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az  $n$  átmérőt.
5. Legyen  $n \geq 2$ . Mennyi az  $n$  csúcsú teljes gráf élgráfjának a komplementerének  $\chi(\overline{L(K_n)})$  kromatikus száma?
6. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



### Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű  $G$  gráf  $r$ -reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy  $\chi'(G) = r + 1$ .
2. Mutassunk minden  $D \geq 1$  számhoz olyan  $G$  gráfot, amelyre  $\Delta(G) = D$  és  $\chi'(G) = D$ .
3. Mutassunk minden  $D \geq 2$  számhoz olyan  $G$  gráfot, amelyre  $\Delta(G) = D$  és  $\chi'(G) = D + 1$ .