Kombinatorika és gráfelmélet 1.

10. gyakorlat, 2021. április 19-20.

Élszínezés

Tudnivalók

$L(G)$: G élgráfja, csúcsai G éleinek felelnek meg, két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a megfelelő éleknek G-ben van közös végpontja.

$\chi'(G) = \chi_e(G)$: G élkromatikus száma, G éleinek a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két közös végpontú él különböző színű.) Nyilván $\chi'(G) = \chi_e(G) = \chi(L(G))$.

Minden G gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Vizing tétel: Minden G egyszerű gráfra $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig tétel: Ha G páros gráf, akkor $\Delta(G) = \chi'(G)$.

1. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű összefüggő gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.

   Megoldás: A Vizing tétel alapján $\chi'(G) = 3$ vagy 4. Próbáljuk meg 3 színnel kiszínezni az éleket. Mivel G 3-reguláris, minden pontba mind a három színű él csatlakozik, tehát mind a három szín élei teljes párosítást alkotnak. Tegyük fel, hogy az elvágó él piros. Ekkor, mind a két komponensben (amit az elvágó él elhagyásával kapunk) a piros élek egy-egy csúcs kivételével teljes párosítást alkotnak, ezért mind a két komponensben páratlan sok csúcs van. Most nézzünk egy másik színt, mondjuk a kéket. A kék élek mind a két komponensben teljes párosítást alkotnak, ezért mind a két komponensben páros sok csúcs van. Ez az ellentmondás mutatja, hogy 3 színnel nem lehet kiszínezni az éleket, tehát $\chi'(G) = 4$.

2. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.

   Megoldás: Vizing tétel alapján $\chi'(G) = 8$ vagy 9. Ha 8 színnel ki lehetne színezni az éleket, akkor minden színhez tartozó élek teljes párosítást alkotnának, ami lehetetlen, mert páratlan sok csúcs van. Tehát $\chi'(G) = 9$

3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.

   Megoldás: A K_n gráf $(n-1)$-reguláris, tehát $\chi'(K_n) = n-1$ vagy n.

   Legyen n páratlan. Ha $n-1$ színnel ki lehetne színezni az éleket, akkor minden színhez tartozó élek teljes párosítást alkotnának, ami lehetetlen, mert páratlan sok csúcs van. Tehát $\chi'(K_n) = n$. Egyébként nem is nehéz mutatni egy jó élszínezést n színnel. Vegyünk egy szabályos n-szöget. Itt minden átló párhuzamos valamelyik oldallal. Minden oldalhoz, es a vele párhuzamos átlókhoz rendelünk egy-egy színt.

   Most legyen n páros. Ekkor $n-1$ szín elég lesz. Vegyünk egy szabályos $(n-1)$-szöget és a középpontját. Minden oldalhoz, es a vele párhuzamos átlókhoz rendelünk egy-egy színt. A kimaradó csúcs (amely a megfelelő oldallal éppen szemben van) és a középpont közti élt is színezzük erre a színre.

4. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.

   Megoldás: Legyen először n páratlan. Színezzük ki a csúcsokat felvátva két színnel. Ez jó színezés lesz, az oldalakra nyilván, és az átlók végei is különböző színűek. Tehát $\chi = 2$. Az élkromatikus szám 3 vagy 4. Színezzük ki az éleket a kör mentén felvátva két színnel, az átlókat a harmadik színnel, ez egy jó élszínezés, tehát $\chi' = 3$.

   Most legyen n páros. Ekkor az egyik átmérőn keresztül haladó „félkör” hossza $n+1$, páratlan, tehát $\chi \geq 3$. Ugyanakkor a Brooks tétel alapján 3 szín biztos elég, tehát $\chi = 3$. Az élkromatikus szám pontosan ugyanúgy megy mint az előbb, $\chi' = 3$.

5. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfjának a komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?

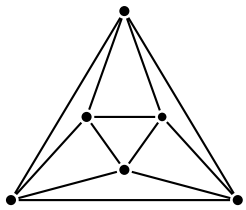
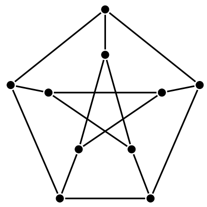
   Megoldás: A G gráfhoz tartozó élgráf $L(G)$ csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk. Tehát $\overline{L(K_n)}$ csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek *nincs* közös végpontjuk.

Állítás: ha $n \geq 3$, akkor a válasz $n-2$. Egyrészt $n-2$ szín elég. K_3 éleit kiszínezhetjük 1 színnel. Tegyük fel, hogy K_{n-1} éleit már kiszíneztük $n-3$ színnel. Vegyünk egy n-edik csúcsot és az összes innen futó élt színezzük ki egy $(n-2)$-ik színnel.

Másrészt $n-2$ szín kell is: $n=3$-ra illetve 4-re triviális. Legyen $n>4$ és tegyük fel, hogy már beláttuk az állítást $(n-1)$-ig. Nézzük K_n élszínezését. Az egy színosztályhoz tartozó élek közül bármely kettőnek van közös végpontja. Tehát vagy egy háromszöget alkotnak (és több nincs) vagy csillagot alkotnak.

Ha minden színosztály egy háromszög, akkor szükség van legalább $\binom{n}{2}/3 > n-2$ színre. Ha valamelyik színosztály, mondjuk a piros, csillagot alkot, akkor legyen v a csillag közepe. Tehát minden piros él v-re illeszkedik. Hagyjuk el v-t, eltuntek a piros élek, de az indukció szerint még mindig van $n-3$ színünk. Tehát legalább $n-2$ színünk volt.

6. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?

Megoldás: Első: minden fok 4, tehát 4 szín biztos kell. De elég is, könnyű kiszínezni. Második: A Vizing alapján 3 vagy 4. Ha 3 lenne: egy színosztályt elhagyva minden fokszám 2-re csökken, tehát körök unióját kapjuk, viszont minden körön felváltva vannak a színek, tehát páros hosszú. De ez nem lehet, mert ebben a gráfban (Petersen gráf) egyáltalán nincsenek páros körök. Tehát a válasz itt is 4.

Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r-reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r+1$.

2. Mutassunk minden $D \geq 1$ számhoz olyan G gráfot, amelyre $\Delta(G) = D$ és $\chi'(G) = D$.

3. Mutassunk minden $D \geq 2$ számhoz olyan G gráfot, amelyre $\Delta(G) = D$ és $\chi'(G) = D+1$.