

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

1. gyakorlat, 2021. február 8.

Elemi leszámítások, szita-formula

Tudnivalók:

Ismétlés nélküli permutáció: n különböző elem összes lehetséges sorrendje,

$$n!$$

Ismétléses permutáció: van n féle elem, az i -edik féleből k_i darab. Ezen elemek összes lehetséges különböző sorrendje,

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!k_2!\dots k_n!}.$$

Ismétlés nélküli variáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darabot kiválasztani, sorrend számít,

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = n!/k!.$$

Ismétléses variáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darab nem feltétlenül különbözőt kiválasztani, sorrend számít,

$$n^k$$

Ismétlés nélküli kombiáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darabot kiválasztani, sorrend nem számít,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Ismétléses kombiáció: hányféleképpen tudunk n különböző elemből k darab nem feltétlenül különbözőt kiválasztani, sorrend nem számít,

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Binomiális tétel: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$.

Egyszerű összefüggések: $2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Skatulya elv: n dobozba rakunk $n+1$ tárgyat. Ekkor mindig lesz olyan doboz, amiben legalább két tárgy van.

Erdős-Szekeres tétel: egy $n^2 + 1$ hosszú, különböző számokból álló sorozatnak mindig van $n+1$ hosszú, monoton részsorozata.

Szita formula: A_1, \dots, A_n halmazok. $|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum (i\text{-es metszetek})$.

1. A cirkusz porondjára 3 tigris, 4 oroszlán és 2 párduc vonul be libasorban. Hányféle lehet a sorrend, ha az azonos fajú állatokat nem tudjuk megkülönböztetni?

Megoldás: $9!/(3! \cdot 4! \cdot 2!)$.

2. Egy versenyen 22-en indulnak; az újságok az első nyolc helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?

Megoldás: $22!/14!$.

3. A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. A biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?

Megoldás: 9^4 .

4. Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatoslottó szelvényt? Hány szelvény szükséges a totón a legalább öt találathoz (a tizenháromból)?

Megoldás: ötöslottó: $\binom{90}{5}$, hatoslottó: $\binom{45}{6}$, totó: 3 elég (csupa 0, csupa 1, csupa x), 2 nem elég.

5. Hányféleképpen állhat sorba n fiú és n lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?

Megoldás: $2 \cdot (n!)^2$.

6. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?

Megoldás: $\binom{9+5}{5}$. összesen 14 lépés, amiből 9-ben avenue-n megyünk (utca szám nő) 5-ször pedig utcán (avenue szám csökken)

7. Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?

Megoldás: $15 \cdot 14 \cdot 13$

8. És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?

Megoldás: $15 \cdot 14 \cdot 13 - 14 \cdot 13 \cdot 12$ (előzőből levonjuk, ahol Kovács úr hoppon marad)

9. Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?

Megoldás: $\binom{40}{5}^{16}$.

10. Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben szerepel az 5-ös számjegy? (Egy szám nem kezdődhet 0-val).

Megoldás: $9 \cdot 10^9 - 8 \cdot 9^9$. (Az összes tízjegyű számból levonjuk azokat, amiben nincs 5-ös.)

11. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett Atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?

Megoldás: $6 \cdot 5 \cdot 5$ (első csík 6-féle lehet, második 5, harmadik 5) vagy máskepp $6^3 - 6 - 2 \cdot 6 \cdot 5$ (összesen 6^3 -féle zászlóvan, levonjuk azokat, ahol két szomszédos csík egyforma színű)

$6 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 4$ (összesből levonjuk azokat, amiben nincs piros)

12. Egy 99 elemű halmaznak páros vagy páratlan elemszámú részhalmazából van-e több? Hát egy 100-elemű halmaznak?

Megoldás: Ugyanannyi. A páros és páratlan halmazok párokba állíthatók úgy, hogy az utolsó elemet kivesszük illetve betesszük. 99-re másik megoldás: $\binom{99}{i} = \binom{99}{99-i}$, i és $99 - i$ ellentétes paritású.

13. Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?

Megoldás: Hat féle dologból választunk összesen 10-et, sorrend nem számít: ismétléses kombináció, $n = 6$, $k = 10$, $\binom{10+5}{5}$.

14. Minimálisan hány töréssel lehet egy 4×5 -ös csokitáblát egyes kockákra tördelni?

Megoldás: Mindenképpen 19, minden töréssel eggyel több darab lesz.

15. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben?

Mik a válaszok futókra?(*)

Megoldás: Bástya: minden oszlopban max 1 lehet, tehát max 8, ennyit el is lehet helyezni, mégpedig 8!-féleképpen. Futó: külön nézhetjük a fehér és fekete mezőket, monjuk fehér: jó irányból nézve 7 átló, tehát összesen max 14 futó. Ennyit lehet is. Hányféleképpen: a két szélső egyes közül egy lehet, aztán befelé haladva 2-2 lehetőség, összesen $(2^4)^2$.

16. Igazoljuk, hogy bármely 5 egymást követő egész szám szorzata osztható 120-szal. Mit mondhatunk k egymást követő egész szám szorzatáról?

Megoldás: Mivel $\binom{n}{k}$ egész, ezért k egymást követő egész szorzata osztható $k!$ -sal.

17. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n számra (i) $\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$, (ii) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Megoldás: (i) Válasszuk ki n ember közül egy tetszőleges méretű csapatot, egy főnökkel. Mindkét oldal ezt számolja le. (ii) Mindkét oldalon egy $2n$ elemű halmaz n elemű részhalmazainak száma áll, a bal oldalon a számolásnál két n -es részre osztva az alaphalmazt.

18. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?

Megoldás: $6^9 \cdot 2$ vagy másképp $6^{10}/3$.

19. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötös lottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-talalatos lesz ezek között a sorsolás után?

Megoldás: $\binom{90}{5}$.

$\binom{5}{i} \cdot \binom{85}{5-i}$, $i = 5, 4, 3, 2$.

20. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba $2n$ különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?

Megoldás: $(2n)!/2^n$. Állítsuk őket sorba $(2n)!$ lehetőség, majd az első n mögé álljon be a második n . Ezután, ha valaki előtt magasabb ember áll, cseréljenek helyet. Ugyanazt az elrendezést 2^n -szer kaptuk meg.

21. Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K	♠	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

Megoldás: Ha a ♠ helyén egy A lenne, akkor a válasz $\binom{13+8}{8}$ lenne. Vonjuk le azokat az utakat, ami használja a ♠ helyén levő A-t: ez $\binom{8+5}{5} \cdot \binom{5+3}{3}$ út. Tehát a válasz $\binom{13+8}{8} - \binom{8+5}{5} \cdot \binom{5+3}{3}$.

22. Nyolc ember szeretne három tenispályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyéni játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két téréfét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)

Megoldás: $8!/(2 \cdot 2 \cdot 2^3)$ vagy másképp $\binom{8}{4} \cdot 3 \cdot \binom{4}{2}$.

23. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra?

Megoldás: Nem egyértelmű, hogy megkülönböztetjük-e a csapatokat. Mondjuk igen. Ekkor sorban kiválasztva a csapatokat: $(\binom{30}{5} \cdot \binom{25}{5} \cdot \binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5})/6!$

24. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban k_1, k_2, \dots, k_n szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?

Megoldás: Legyen $f = \sum_{i=1}^n k_i$, ekkor a válasz $f!/(f-m)!$ vagyis $f(f-1) \cdots (f-m+1)$.

A második: $\binom{k-l}{l} \cdot 2^l$. Ha összeragasztjuk a házaspárokat, akkor tulajdonképpen l pár és $k-2l$ üres szék van egy sorban. Ez $\binom{k-l}{l}$ -féle lehet, és még minden házaspárt kétféleképpen ülhet.

25. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezét fogják (a nők is). Természetesen senki sem fogja kezét a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogták kezét, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezét Kovácsné? (*)

Megoldás: 9 embert kérdez meg, tehát 9 különböző választ kap. Egy ember min 0-szor és max 8-szor foghatott kezét, tehát a válaszok éppen $0, 1, \dots, 8$. A 8-as mindenkivel kezét fogott, csak a házastársával nem. Tehát a házastárs a 0-ás. Ha most tőlük és a kézfogásaiktól eltekintünk, akkor mindenkinek eggyel csökkent a száma, az elH özözhöz hasonlóan itt a 6-os házastárs a 0-ás, stb. Azt kapjuk, hogy az eredeti kézfogásokkal számolva, a házastársak a 8, 0, 7, 1, 6, 2 és 5, 3, Kovácsné a 4-es.

26. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $\varphi(n) = n \prod_{p|n, p \text{ prím}} (1 - \frac{1}{p})$ az n -nél kisebb, n -hez relatív prím pozitív egészek száma.

Megoldás: Szita formulával, $n - n/p_1 - n/p_2 - \dots + n/(p_1 p_2) + \dots - n/(p_1 p_2 p_3) \dots$, n -et kiemelve, szorzattá alakítva kész.

27. Igazoljuk, hogy 2019 tetszőlegesen megadott egész számból kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük 2019 többszöröse legyen.

Megoldás: Legyenek a számok $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$. Az $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_{2019}$ számok között vagy van 0 maradékú (mod 2019) vagy van két azonos maradékú, ezek különbsége jó lesz.

28. A 65 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni a kombi előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnnyitóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?

Megoldás: Szita formula, A : senki sem megy kombira, B : senki sem megy évnnyitóra, C : senki sem megy kocsmába. $|A \cup B \cup C| = 3^{65} \cdot 3 - 2^{65} \cdot 3 + 1$. Nekünk a komplementere kell: $4^{65} - 3^{65} \cdot 3 + 2^{65} \cdot 3 - 1$.

29. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n, k > 1$ egészek esetén megadható olyan a_1, a_2, \dots, a_{nk} különböző számokból álló sorozat, amely nem tartalmaz sem $n + 1$ tagú növekedő, sem $k + 1$ tagú csökkenő részsorozatot.

Megoldás: Legyen $0 \leq i < k$ és $0 \leq j < n$ esetén $a_{in+j} = jk - i$. Növekedő részsorozatban a j , csökkenőben pedig az i növekszik.

30. Mennyi n elem fixpont nélküli permutációinak száma? (Azaz az olyan permutációk száma érdekel bennünket, melyben semmilyen $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ elemre sem teljesül, hogy éppen az i . helyen állna.) Ha ez az érték $f(n)$, akkor mennyi az $f(n)/n!$ arány limesze, ha n tart végtelenhez?

Megoldás: Szita formulával, $n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \binom{n}{3} (n-3)! \dots = n!(1 - 1 + 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + \dots)$. Ez egyébként tart $n!/e$ -hez.

31. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (*)

Megoldás: Mind köztudott, $\binom{8}{4} = 70$, tehát ha veszünk 8 nyelvet és minden tolmács megfelel egy 4 elemű részhalmaznak, ami az általa ismert 4 nyelv, akkor ez 70 tolmács és teljesíti a feltételeket. Tehát 8 nyelv elég. Most tegyük fel, hogy 7 nyelv is elég. Ekkor van 35 tolmács, aki mind ismeri vagy egyik se ismeri a 7-es nyelvet. Tehát ezekhez a másik 6 nyelv is elég. Hasonlóan, 18-hoz elég lenne 5 nyelv, 9-hez 4, 5-höz 3, 3-hoz 2, 2-höz 1 nyelv, ami lehetetlen! Tehát 8 nyelvre szükség van.

32. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében? (*)

Megoldás: Akárhogy veszünk 4 csúcst, azoknak megfelel egy metszéspont, és fordítva, minden metszéspontnak megfelel 4 csúcs. Tehát a válasz $\binom{n}{4}$

33. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárt ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell „venniük” a vasboltban, hogy ezt megtehessek? (*)

Megoldás: Bármely három rablóhoz kell lennie olyan lakatkulcsnak, ami nekik hiányzik, de két hármashoz ennek különbözőnek kell lenni. Tehát $\binom{10}{3}$ lakat kell. De ennyi elég is, minden hetesnek feleljen meg egy lakat, amihez csak nekik van kulcsuk. $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ tehát kész vagyunk.

34. A HK 18 vezetőjéből hányféleképpen lehet a gólyatábor 9 fős szervezőbizottságát úgy megválasztani, hogy a 7 büntetett előéletű tagból legfeljebb 3 kaphasson helyet a testületben? (*)

Megoldás: Minden 9-elemű részhalmaz és komplementere közül pontosan az egyik szervezhető. Tehát a válasz $\binom{18}{9}/2$.

Házi feladatok

1. a. Egy hosszú alakú asztalnál egymás mellett ülő n emberből hányféleképpen lehet olyan k -tagú bizottságot kijelölni, amelybe nem kerülnek közvetlenül egymás mellett ülő tagok? (*)
b. Ugyanaz, csak az n ember egy kör alakú asztalnál ül. (*)
2. a. Az $(x + y)^{100}$ kifejtésében melyik tag együtthatója a legnagyobb?
b. Az $(2x + 3y)^{100}$ kifejtésében melyik tag együtthatója a legnagyobb?
(A kifejtés során elvégezzük a beszorzásokat és összevonjuk az azonos szorzatokat, tehát minden tag $C_i x^i y^{100-i}$ alakot ölt alkalmas i -re. A kérdés a C_i együtthatókról szól.)