

Kombinatorika és gráfelmélet I  
**Nyílt helyi**, 2020. május 8, 9.00-12.00

A megoldásokat küldjék el 12.00 előtt a **geza@renyi.hu** címre! Kérem, olvashatóan írjanak, aki kézzel, az viszonylag nagy betűkkel és mindenki minden oldalra írja rá a nevét!

Minden írott anyag használható.

Az aláíráshoz 40%-ot kell elérni. Jó munkát!

1. A  $G$  teljes gráf csúcsai  $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n, n \geq 2$ . Az  $u_i u_j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) élek súlya 1, a  $v_i v_j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) élek súlya 2, az  $u_i v_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) élek súlya  $x$ , ahol  $x > 0$  (nem feltétlenül egész).

a. Határozzuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa  $S(x)$  összsúlyát  $x$  függvényében.

b. Határozzuk meg a minimális összsúlyú feszítőfák számát, ha  $x = 3$ .

2. A  $G$  8 pontú gráf két darab háromszög és egy él diszjunkt uniója. Minimálisan hány élt kell hozzávenni  $G$ -hez, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler köre?

3. A  $G, s, t, c$  hálózatban az  $e_1$  és  $e_2$  élek kapacitása  $c(e_1) = x, c(e_2) = y$ . A többi él kapacitása adott, nem függ  $x$ -től és  $y$ -től. Tetszőleges  $x, y > 0$  esetén legyen  $M(x, y)$  a maximális folyam nagysága. Tudjuk, hogy  $M(1, 100) = 1, M(100, 1) = 1, M(100, 100) = 10$ .

Határozzuk meg  $M(2, 2)$  értékét.

4. A  $G$  gráf csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{36}, v_i$  és  $v_j, 1 \leq i < j \leq 36$ , akkor és csak akkor van összekötve, ha  $i \cdot j$  osztható 12-vel. Határozzuk meg  $\kappa(G)$ -t,  $G$  pontösszefüggőségi számát.

5.  $G$ -nek 100 csúcsa van, a független élek maximális száma,  $\nu(G) = 10$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$  kromatikus száma,  $\chi(G) \leq 21$ .

6. A  $G$  16 csúcsú gráf csúcsai  $v_{i,j}, 1 \leq i, j \leq 4$ . A  $v_{i,j}$  és  $v_{k,l}$  csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha

(1)  $i = k$  és  $j \neq l$ , vagy (2)  $j = l$  és  $i \neq k$ .

Bizonyítsuk be, hogy  $G$  nem síkgráf.